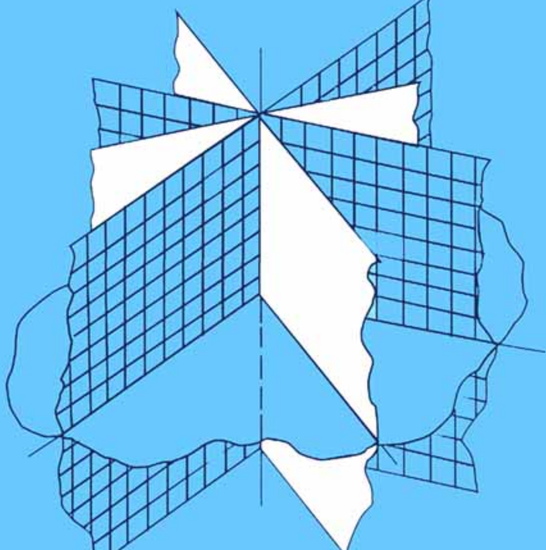
Prácticas para Resolver

PROBLEMAS MATEMÁTICOS

V. Gúsev,
V. Litvinenko.
A. Mordkóvich



Editorial Mir Moscú

Prácticas para Resolver

PROBLEMAS MATEMÁTICOS

В. А. Гусев, В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Геометрия

Москва «Просвещение»

Prácticas para Resolver

PROBLEMAS MATEMÁTICOS

V. Gúsiev,
V. Litvinenko,
A. Mordkóvich

Geometría

Editorial Mir Moscú

Traducido del ruso por el ingeniero
Antonio Ballesteros Elías

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-000669-9

INDICE

PROLOGO

El presente manual está dirigido a los estudiantes de las facultades matemáticas y fisicomatemáticas de las Escuelas Normales Superiores para las especialidades «Matemática» y «Matemática y física» y, además, para la especialidad «Física y matemática». Está confeccionado en correspondencia con el programa en vigor «Prácticas de resolución de problemas».

Al trabajar en las «Prácticas» tendíamos a que en ellas encontraran su reflejo los tipos fundamentales de problemas geométricos escolares. En el presente libro hay cerca de 1000 problemas, de diversa complejidad para la resolución individual. Junto con problemas comparativamente sencillos, con carácter de entrenamiento, hay problemas cuya resolución requiere serias reflexiones y, en ocasiones, enfoque no estándar. Aunque no sea de todos, la resolución de una considerable parte de los problemas, ayudará al estudiante a la formación de tan importante cualidad profesional para el futuro profesor de matemáticas como el hábito de resolver problemas geométricos que correspondan a los requisitos de los programas de matemáticas de las escuelas medias de enseñanza general y profesional.

Los procedimientos y métodos para resolver problemas geométricos se analizan en diferentes partes del curso de geometría estudiado en las Escuelas Normales Superiores. No obstante, a los métodos tradicionales se presta insuficiente atención, por lo que uno de los objetivos planteados en el proceso de la creación de este manual era completar esos huecos.

Señalemos que el libro que ofrecemos a la atención del lector no sólo es un compendio de problemas en su sentido habitual, sino, además, un libro de prácticas para resolver problemas. Esto ha hallado su reflejo en el contenido y en la estructura de nuestro libro.

Cada apartado contiene material teórico y ejemplos examinados con detalle. Con singular minuciosidad hemos elegido los problemas acompañados de las soluciones, tendiendo a que cada solución sea útil al estudiante, ante todo, desde el punto de vista metodológico, para que el conjunto de dichos ejemplos sea una aportación lo suficientemente plena y entera en la preparación de los estudiantes de las Escuelas Normales Superiores de los problemas del método particular de enseñanza de las matemáticas en la escuela. Al final de casi todo apartado se aducen problemas para el trabajo individual. Ellos están agrupados según las partes y secciones de la geometría escolar y por el grado de crecimiento de la complejidad. Para la mayoría de los problemas, que se resuelven de forma individual, al final del libro se ofrecen las soluciones y, para parte de ellos, indicaciones para su resolución.

El presente manual consta de dos capítulos. El primero está dedicado a resolver problemas de planimetría. En el § 1, que en cierto sentido es la introducción a todo el libro, tratan los métodos para resolver problemas geométricos tradicionales, que con actividad se emplean en los siguientes apartados. Aquí se destacan los métodos puramente geométricos, algebraicos y mixtos, así como sus casos particulares: el método del elemento de referencia (que contiene el método de las áreas) y el método de introducción de un parámetro auxiliar. Para que sea más cómodo trabajar, en ese mismo apartado se ofrece la lista de los teoremas de planimetría, necesarios para resolver los problemas.

En los párrafos 2—4 se ha incluido una cantidad bastante grande de problemas estándares de dificultad media, ya que, como muestra la práctica, los problemas tradicionales de planimetría son uno de los puntos débiles en la preparación de los estudiantes, futuros profesores de matemáticas.

El objetivo fundamental de los párrafos 5—6 es la formación en los futuros profesores los hábitos y conocimientos necesarios para resolver los problemas geométricos según el método de las transformaciones geométricas y el método vectorial. Al mismo tiempo, hay que remarcar que dichos apartados, fundamentalmente, contienen problemas geométricos tradicionales, que se resuelven mediante los métodos indicados, pero no problemas especiales para las transformaciones y vectores, con lo que se tropieza, frecuentemente, en los compendios de problemas de geometría. Aquí no nos habíamos planteado el objetivo de mostrar la ventaja de los métodos indicados, lo primero es necesario enseñar al estudiante la aplicación de estos métodos. Como los problemas geométricos pueden ser resueltos por diversos métodos, en los párrafos 2—4, 5 y 6 se tropieza con problemas iguales o análogos.

Dos párrafos (el § 7 del capítulo I y el § 16 del capítulo II) están dedicados a problemas geométricos para la búsqueda de los valores mínimos y máximos. Por regla, se considera que de dichos problemas ha de ocuparse el curso de análisis matemático. Pero en él, la fundamental aplicación de esos problemas consiste en la demostración del papel aplicado del cálculo diferencial (es decir, se acentúa la resolución de los problemas dentro del modelo matemático confeccionado y, en menor grado, para la propia composición del modelo y su interpretación). Incluyendo en el presente manual uno u otro problema para determinar el valor máximo o mínimo, teníamos en cuenta que cada uno de los problemas fuera, ante todo, interesante desde el punto de vista geométrico (es decir, que se acentuara la estructuración del modelo matemático y su interpretación).

El segundo capítulo está dedicado a la resolución de problemas de estereometría. En él, en forma breve, se recuerdan los datos fundamentales para la construcción de las representaciones de las figuras en la proyección paralela. Se trata de la determinación de la plenitud de la representación y su definición métrica. Se examinan las construcciones geométricas en el espacio y, con ello, se presta singular atención a las construcciones en las representaciones. En este capítulo muchos problemas son nuevos confeccionados especialmente para el presente material. Entre ellos, señalemos aquellos que están ligados con la determinación del ángulo entre rectas cruzadas, la distancia entre ellas, el ángulo entre la recta y el plano, el ángulo diedro y los problemas relacionados con la construcción de las secciones. Según nuestra opinión, la resolución de estos problemas ha de favorecer al desarrollo en los estudiantes de las representaciones espaciales.

Los autores

Capítulo I

PLANIMETRÍA

§ 1. SOBRE LOS MÉTODOS PARA RESOLVER PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Al resolver problemas geométricos, por regla, se emplean tres métodos fundamentales: *geométrico* (la afirmación requerida se deduce con ayuda de razonamientos lógicos de una serie de teoremas conocidos); *algebraico* (la demostración de la afirmación o bien el hallazgo de los valores que se determinan, se realiza con el cálculo directo, sobre la base de diversas dependencias entre las magnitudes geométricas, con ayuda de la composición de ecuaciones o sistemas de éstas); *mixto* (en ciertas etapas la resolución se lleva a cabo por método geométrico, en otras, algebraico).

Independientemente de la vía elegida para la resolución, el éxito de su utilización, como es natural, depende del conocimiento de los teoremas y el hábito de su aplicación. Recordemos la enunciación de alguno de los teoremas que se emplean activamente en la resolución de los problemas. Más adelante, reiteradamente, nos vamos a referir a esos teoremas.

I. Triángulos y cuadriláteros

1. Teorema de la igualdad de los ángulos con lados perpendiculares entre sí: si $\angle ABC$ y $\angle DEF$ son ambos agudos o bien obtusos y

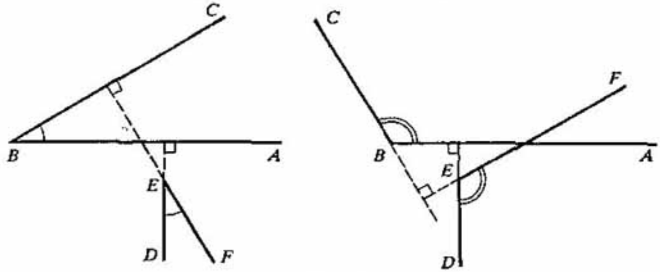


Fig. 1

$AB \perp DE$, $BC \perp EF$ (fig. 1), entonces $\angle ABC = \angle DEF$.

2. Propiedades de la línea media del trapecio:

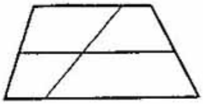


Fig. 2

a) la línea media es paralela a las bases del trapecio;

b) la línea media es igual a la semisuma de las bases del trapecio;

c) la línea media (y sólo ella) divide por la mitad cualquier segmento contenido entre las bases del trapecio (fig. 2).

Estos teoremas son también válidos para la línea media del triángulo si consideramos que éste es un trapecio «degenerado», una de cuyas bases tiene una largura igual a cero.

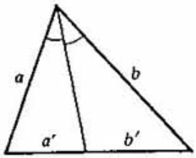


Fig. 3

3. Teoremas sobre los puntos de intersección de las medianas, bisectrices, alturas del triángulo:

a) las tres medianas del triángulo concurren en un punto (llamado centro de gravedad o centroide del triángulo) y se dividen por ese punto en la razón 2 : 1, contando desde el vértice;

b) las tres bisectrices del triángulo concurren en un punto;

c) las tres alturas del triángulo concurren en un punto (llamado ortocentro del triángulo).

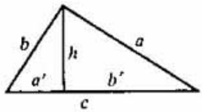


Fig. 4

4. Propiedad de la mediana en un triángulo rectángulo: en un triángulo rectángulo la mediana trazada a la hipotenusa es igual a su mitad. El teorema inverso es asimismo cierto: si en un triángulo una de las medianas es igual a la mitad del lado sobre el que está trazada, tal triángulo es rectángulo.

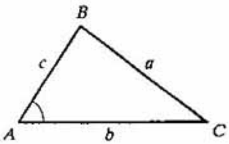


Fig. 5

5. Propiedad de la bisectriz del ángulo interior de un triángulo: la bisectriz del ángulo interno de un triángulo divide el lado en el que está trazada en partes proporcionales a los lados adyacentes: $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ (fig. 3).

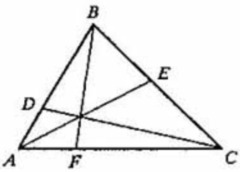


Fig. 6

6. Relaciones métricas en el triángulo rectángulo: si a y b son los catetos, c, la hipotenusa, h, la altura, a' y b', las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa (fig. 4), entonces: a) $h^2 =$

$= a'b'$; b) $a^2 = ca'$; c) $b^2 = cb'$; d) $a^2 + b^2 = c^2$; e) $h = \frac{ab}{c}$.

7. Teorema de los cosenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (fig. 5).

8. Teorema de los senos: $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

9. Definición del tipo de triángulo por sus lados: sean a, b, c los lados del triángulo, con la particularidad de que c es el lado mayor, entonces:

a) si $c^2 < a^2 + b^2$, el triángulo es ocutángulo;

b) si $c^2 = a^2 + b^2$, el triángulo es rectángulo;

c) si $c^2 > a^2 + b^2$, el triángulo es obtusángulo.

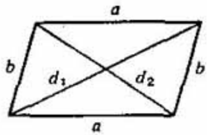


Fig. 7

10. Teoremas de Ceva: supongamos que en el triángulo ABC, en los lados AB, BC, AC se han tomado los puntos D, E, F, respectivamente. Con el fin de que las rectas AE, BF y CD concurvan en un punto (fig. 6) es necesario y suficiente que se verifique la igualdad

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1.$$

11. Relaciones métricas en el paralelogramo: la suma de los cuadrados de las diagonales del paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$ (fig. 7).

II. La circunferencia

12. Propiedades de las tangentes a la circunferencia:

a) el radio trazado al punto de tangencia es perpendicular a la tangente (fig. 8);

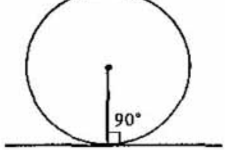


Fig. 8

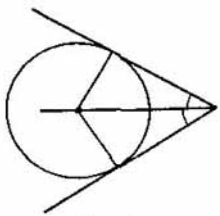


Fig. 9

b) dos tangentes trazadas a la circunferencia desde un mismo punto son iguales, y el centro de la circunferencia yace en la bisectriz del ángulo entre ellas (fig. 9).

13. Medida de los ángulos relacionados con la circunferencia:
a) el ángulo central se mide con el arco sobre el que se apoya;
b) el ángulo inscrito se mide con la mitad del arco sobre el que se apoya;
c) el ángulo entre la tangente y la cuerda se mide con la mitad del arco entre ellas.
14. Teoremas sobre las circunferencias y los triángulos:

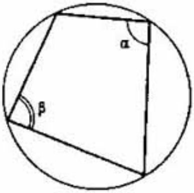


Fig. 10

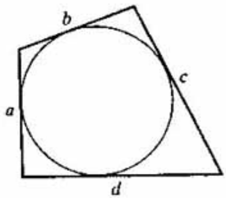


Fig. 11

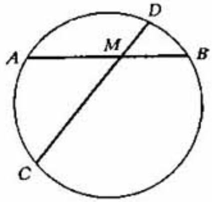


Fig. 12

a) a todo triángulo es posible circunscribir una circunferencia; el centro de ésta es el punto en que concurren las perpendiculares trazadas a los lados por sus puntos medios;
b) en todo triángulo es posible inscribir una circunferencia; el centro de ésta será el punto en que concurren las bisectrices.
15. Teoremas sobre las circunferencias y los cuadriláteros:

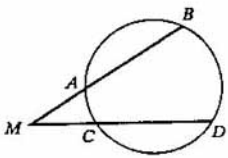


Fig. 13

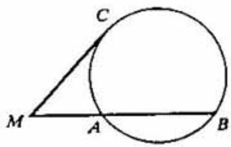


Fig. 14

a) con el fin de que a un cuadrilátero puede ser circunscrita una circunferencia, es necesario y suficiente que la suma de los ángulos opuestos del cuadrilátero sea igual a 180° ($\alpha + \beta = 180°$, fig. 10).
b) con el fin de que en un cuadrilátero puede ser inscrita una circunferencia, es necesario y suficiente que las sumas de sus lados opuestos sean iguales ($a + c = b + d$, fig. 11).
16. Relaciones métricas en la circunferencia:
a) si las cuerdas AB y CD se cortan en el punto M, $AM \cdot BM = CM \cdot DM$ (fig. 12);

b) si del punto M se trazan a la circunferencia dos secantes MAB y MCD, $AM \cdot BM = CM \cdot DM$ (fig. 13);

c) si del punto M se trazan la secante MAB y la tangente MC, $AM \cdot BM = CM^2$ (fig. 14).

III. Áreas de las figuras planas

17. La razón entre las áreas de figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

18. Si en dos triángulos son iguales las bases, sus áreas se relacionan como las alturas; si en dos triángulos son iguales las alturas sus áreas se relacionan como las bases.

19. Fórmulas para calcular el área de un triángulo: a) $S = \frac{ah}{2}$; b) $S = \frac{ab \operatorname{sen} C}{2}$; c) $S = \frac{abc}{4R}$; d) $S = pr$, donde $p = \frac{a+b+c}{2}$; R es el radio de la circunferencia circunscrita; r, el radio de la circunferencia inscrita; e) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (fórmula de Herón).

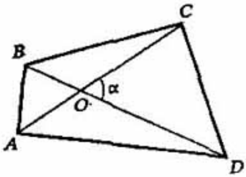


Fig. 15

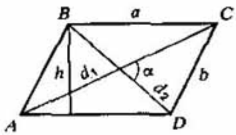


Fig. 16

20. Fórmulas para calcular el área de un cuadrilátero convexo (fig. 15): a) $S = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABD} + S_{BCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$; b) $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \operatorname{sen} \alpha$; c) $S = pr$ (si en el cuadrilátero se puede inscribir una circunferencia y r es su radio).

21. Fórmulas para calcular el área de un paralelogramo (fig. 16): a) $S = ah$; b) $S = ab \operatorname{sen} C$; c) $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \operatorname{sen} \alpha$.

22. Fórmula del área del trapecio (fig. 17): $S = \frac{a+b}{2} h$.

23. Fórmula del área de un sector circular (fig. 18): $S = \frac{1}{2} R^2 \alpha$ (α es la medida en radianes del ángulo central).

24. Fórmula del área de un segmento circular (fig. 19): $S = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \operatorname{sen} \alpha)$.

Con frecuencia, al resolver problemas geométricos, es preciso establecer la igualdad de dos segmentos (o ángulos). Indiquemos las *tres vías fundamentales de la demostración geométrica de la igualdad de dos segmentos:*

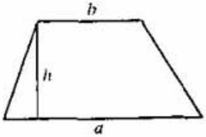


Fig. 17

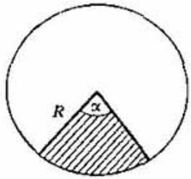


Fig. 18

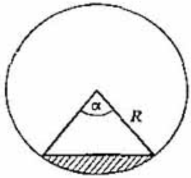


Fig. 19

1) dichos segmentos se consideran como los lados de dos triángulos y se demuestra que éstos son iguales;

2) dichos segmentos se consideran como lados de un triángulo y se demuestra que éste es isósceles.

3) el segmento a se sustituye por el a', igual a él, mientras que el segmento b por el b', igual a él y se demuestra la igualdad de los segmentos a' y b'.

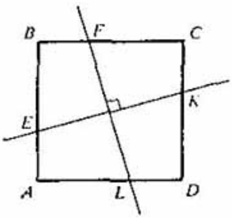


Fig. 20

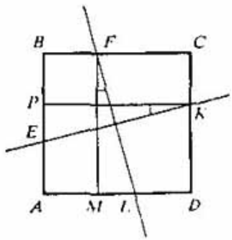


Fig. 21

Al resolver problemas geométricos con frecuencia es preciso realizar construcciones auxiliares. Indiquemos algunas de ellas: trazado de una recta paralela o perpendicular a una de las que hay en la figura; duplicación de la mediana de un triángulo, como resultado de lo que el triángulo se transforma en paralelogramo; trazado de una circunferencia auxiliar; trazado de radios al punto de tangencia de una circunferencia y una recta o de dos circunferencias, etc.

EJEMPLO 1. Dos rectas perpendiculares entre sí cruzan los lados AB, BC, CD y AD del cuadrado $ABCD$ en los puntos E, F, K, L, respectivamente. Demostremos que $EK = FL$ (fig. 20).

SOLUCIÓN. Haciendo uso de la primera de las vías indicadas para la demostración de la igualdad de dos segmentos, tracemos $FM \parallel CD$ y $KP \parallel AD$, entonces, los segmentos que nos interesan EK y FL se convertirán en los lados de dos triángulos rectángulos EKP y FLM (fig. 21) y, por consiguiente, es suficiente demostrar la igualdad de dichos triángulos.

Tenemos: $PK = FM$ (como alturas de un cuadrado), $\angle LFM = \angle EKP$ (como los ángulos de lados perpendiculares entre sí, teorema 1). Esto significa, que $\Delta EKP = \Delta FLM$ (según el cateto y ángulo agudo). De la igualdad de los triángulos rectángulos se desprende la igualdad de sus hipotenusas, o sea, de los segmentos EK y FL.

EJEMPLO 2. Los lados de un triángulo son iguales a a, b, c. Calculemos la mediana m_c trazada hacia el lado c.

SOLUCIÓN. Dupliquemos la mediana hasta convertir el triángulo en el paralelogramo $ACBP$ (fig. 22) y apliquemos a éste el teorema 11.

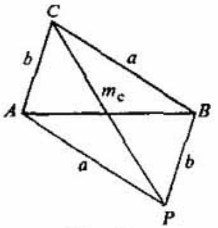


Fig. 22

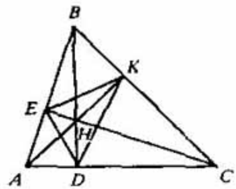


Fig. 23

Obtendremos: $CP^2 + AB^2 = 2AC^2 + 2BC^2$, o sea, $(2m_c)^2 + c^2 = 2b^2 + 2a^2$, de donde hallamos: $m_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$.

EJEMPLO 3. Demostremos que el ortocentro de un triángulo ocutángulo coincide con el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo formado por las bases de las alturas.

SOLUCION. Como centro de la circunferencia inscrita en el triángulo es el punto en el que se cortan las bisectrices (teorema 14b), el problema se reduce a demostrar que DH, EH, KH son las bisectrices del triángulo DEK (fig. 23). Para ello, es suficiente demostrar que $\angle EDH = \angle HDK$.

Examinemos el cuadrilátero $DHKC$. Tenemos: $\angle HDC = 90°$, $\angle HKC = 90°$, es decir, $\angle HDC + \angle HKC = 180°$, por lo que en torno al cuadrilátero $DHKC$ es posible circunscribir una circunferencia (teorema 15a).

Al circunscribir dicha circunferencia (fig. 24) advertimos que los ángulos HDK y HCK son iguales por estar inscritos y porque se apoyan en un mismo arco HK. Por analogía, al circunscribir una circunferencia al cuadrilátero $AEHD$ llegamos a la conclusión de que $\angle EAH = \angle EDH$.

Así, pues, $\angle EAH = \angle EDH$, $\angle HDK = \angle HCK$. Pero los ángulos EAH y HCK son iguales como los ángulos con lados perpendiculares (teorema 1), por lo que, $\angle EDH = \angle HDK$, que es lo que queríamos demostrar.

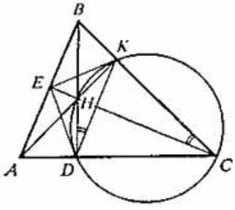


Fig. 24

Para la composición de ecuaciones en los problemas geométricos se hace uso del teorema de Pitágoras, las relaciones métricas en el triángulo rectángulo (teorema 6), las dependencias entre los lados y ángulos del triángulo rectángulo, la proporcionalidad de los lados, alturas y perímetros de los triángulos semejantes, el teorema acerca de la bisectriz del triángulo (teorema 5), relaciones métricas en el paralelogramo (teorema 11) y la circunferencia (teorema 16), el teorema de los senos (teorema 8), el teorema de los cosenos (teorema 7), diversas fórmulas para calcular las áreas.

El método fundamental de composición de ecuaciones en el problema geométrico es el del *elemento de referencia*, que consiste en lo siguiente: un mismo elemento se expresa (mediante magnitudes

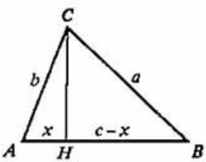


Fig. 25

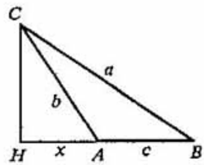


Fig. 26

conocidas y desconocidas) con ayuda de dos procedimientos diferentes y las expresiones obtenidas se igualan entre sí. Si en calidad de elemento de referencia se emplea el área, también se dice que el problema se ha resuelto según el *método de las áreas*.

EJEMPLO 4. Los lados de un triángulo son iguales a a, b y c. Calculemos la altura h_c, trazada al lado c.

SOLUCIÓN. *I procedimiento.*

La altura h_c es el cateto común de dos triángulos rectángulos ACH y CHB (fig. 25). Empleando el teorema de Pitágoras expresemos CH^2 del $\triangle ACH$ y del $\triangle CHB$ (CH es el elemento de referencia).

Hagamos $AH = x$, entonces $BH = c - x$. Si el $\triangle ACB$ fuera obtusángulo, tendríamos $BH = c + x$ (fig. 26). Aquí, vamos a limitarnos al caso mostrado en la fig. 25.

Del $\triangle ACH$ hallamos: $CH^2 = b^2 - x^2$, del $\triangle BCH$ hallamos: $CH^2 = a^2 - (c - x)^2$.

De la ecuación $b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$, obtenemos: $x = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}$.

Del $\triangle ACH$, hallamos:

$$CH = \sqrt{b^2 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(b - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}\right)\left(b + \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{(a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2)} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)(a + b + c)}.$$

Así, pues,

$$h_c = \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}}{2c}.$$

II procedimiento. Hagamos uso del método de las áreas. Por un lado, el área del triángulo ABC es igual a $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ y, por otro, es igual a $\frac{1}{2}ch_c$. Igualando estas expresiones, obtenemos:

$$h_c = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}.$$

Poniendo en lugar de p su expresión por los lados $p = \frac{a+b+c}{2}$, obtenemos:

$$h_c = \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}}{2c}.$$

EJEMPLO 5. Los lados de un triángulo son a, b y c. Hallar la bisectriz l_c trazada hacia el lado c.

SOLUCIÓN. *I procedimiento* (algebraico). Sea CD la bisectriz del $\triangle ABC$ (fig. 27). Plan para la resolución: hallemos la longitud de los segmentos AD y BD y, a continuación, empleando para los triángulos ACD y BCD el teorema de los cosenos (con ello, teniendo en cuenta que $\angle ACD = \angle DCB$), hallamos la bisectriz $l_c = CD$.

Hagamos $AD = x$, $BD = y$. Entonces, $x + y = c$ y según la propiedad de la bisectriz (teorema 5) $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$. Del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y=c, \\ \frac{x}{y}=\frac{b}{a} \end{cases} \text{ hallamos: } \quad x=\frac{bc}{a+b}, \quad y=\frac{ac}{a+b}.$$

Aplicando al $\triangle ADC$ el teorema de los cosenos (teorema 7), obtenemos

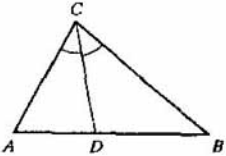


Fig. 27

$$x^2 = b^2 + l^2 - 2bl\cos t \tag{1}$$

(aquí, para mayor brevedad, hemos hecho $l_c = l$ y $\angle ACD = \angle DCB = t$).

Aplicando al $\triangle BDC$ el teorema de los cosenos, obtenemos:

$$y^2 = a^2 + l^2 - 2al\cos t. \tag{2}$$

Multipliquemos ambos miembros de la igualdad (1) por a y ambos miembros de la igualdad (2) por $(-b)$ y sumemos las igualdades obtenidas como resultado de las multiplicaciones: $ax^2 - by^2 = ab^2 - a^2b + al^2 - bl^2$, de donde hallamos:

$$l^2 = \frac{1}{a-b}(x^2a - y^2b) + ab. \tag{3}$$

Pongamos en la igualdad (3) los valores de x e y hallados más arriba. Obtenemos: $l^2 = \frac{1}{a-b}\left(\frac{b^2c^2a}{(a+b)^2} - \frac{a^2c^2b}{(a+b)^2}\right) + ab = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right) = \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}$.

Así, pues, $l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$.

II procedimiento. Además de la magnitud incógnita que buscamos l, introduzcamos otra magnitud incógnita auxiliar: hagamos $x = \angle ACD = \angle DCB$ y hagamos uso del método de las áreas. Tenemos: $S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD}$. Por un lado, $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}2x$. Por otro, ya que $S_{ACD} = \frac{1}{2}bl\operatorname{sen}x$, $S_{BCD} = \frac{1}{2}al\operatorname{sen}x$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}al\operatorname{sen}x + \frac{1}{2}bl\operatorname{sen}x$.

Es decir, $\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}2x = \frac{l(a+b)\operatorname{sen}x}{2}$, de donde $l = \frac{2ab\cos x}{a+b}$.

Para hallar $\cos x$ empleemos el teorema de los cosenos respecto del triángulo ABC para el lado AB. Obtenemos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 2x$, de donde hallamos: $\cos 2x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Entonces, $\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}$.

Como resultado, obtenemos:

$$l = \frac{2ab\cos x}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}} = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

Durante la confección de las ecuaciones, al resolver el problema geométrico, hay que tener en cuenta que, con frecuencia, el éxito de la resolución depende de la introducción ventajosa de las variables. Aclaremos este pensamiento en el siguiente ejemplo.

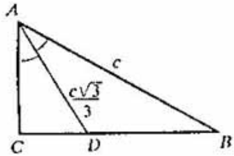


Fig. 28

EJEMPLO 6. En un triángulo rectángulo la hipotenusa es igual a c y la bisectriz de uno de los ángulos agudos es igual a $\frac{c\sqrt{3}}{3}$. Hallemos los catetos (fig. 28).

SOLUCIÓN. *I procedimiento.* Hagamos $AC = x$, $BC = y$, $CD = z$. Entonces, de acuerdo con el teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = c^2$ y $x^2 + z^2 = \left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2$. Además, según el teorema de la bisectriz (teorema 5), tenemos $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB}$, es decir, $\frac{x}{c} = \frac{z}{y-z}$.

Como resultado, obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres variables: $\begin{cases} x^2+y^2=c^2, \\ x^2+z^2=\frac{c^2}{3}; \\ \frac{x}{c}=\frac{z}{y-z}, \end{cases}$ cuya resolución está ligada a considerables complicaciones algebraicas.

II procedimiento. Supongamos que $\angle CAD = \angle BAD = x$. Empleando el segmento AC como elemento de referencia, compongamos la ecuación. Del triángulo ABC, hallamos: $AC = c\cos 2x$; del triángulo ACD, tenemos: $AC = \frac{c\sqrt{3}}{3}\cos x$. Igualando estas expresiones, obtenemos la ecuación trigonométrica $c\cos 2x = \frac{c\sqrt{3}}{3}\cos x$.

Resolvemos esa ecuación: $\sqrt{3}\cos 2x = \cos x$, $\sqrt{3}\,(2\cos^2 x - 1) = \cos x$, $2\sqrt{3}\cos^2 x - \cos x - \sqrt{3} = 0$, de donde $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ o bien $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Pero, como por el sentido del problema $\cos x > 0$, obtenemos: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Esto significa que el ángulo BAD es igual a $30°$ y BAC, a $60°$. Como resultado, obtenemos: $AC = \frac{c}{2}$, $BC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Si en el problema es preciso hallar la razón entre ciertas magnitudes (larguras o áreas), en particular, si es preciso calcular algún ángulo (lo que, por regla, se reduce a la búsqueda de cierta función trigonométrica del ángulo y, por consiguiente, la razón de los lados de un triángulo rectángulo), corrientemente se opera del modo siguiente: se considera que uno de los elementos lineales es conocido, con él se expresan las magnitudes necesarias y, a continuación, se confeccionan sus razones. El elemento lineal introducido lleva el nombre de parámetro auxiliar y semejante método de resolución de los problemas geométricos, *método de introducción de parámetros auxiliares.* Es aplicable a los problemas donde la figura geométrica está definida con precisión hasta la semejanza.

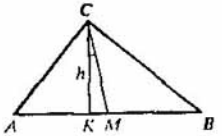


Fig. 29

EJEMPLO 7. En el triángulo rectángulo ABC, desde el vértice del ángulo recto se han trazado una altura y mediana. El ángulo α entre ellas es igual a $\arccos\frac{40}{41}$. Hallemos la razón entre los catetos (fig. 29).

SOLUCIÓN. Ante todo, es de advertir que, de acuerdo con el planteamiento, $\cos\alpha = \frac{40}{41}$, es decir, $\frac{CK}{CM} = \frac{40}{41}$. Resolvamos el problema según el método de introducción de un parámetro auxiliar.

Hagamos $CK = h$. Entonces, $CM = \frac{41}{40}h$, $KM = \sqrt{CM^2 - CK^2} = \frac{9}{40}h$. Como en el triángulo rectángulo la mediana es igual a la mitad de la hipotenusa (teorema 4), $AM = CM = MB = \frac{41}{40}h$. Entonces, $AK = AM - KM = \frac{41}{40}h - \frac{9}{40}h = \frac{4}{5}h$, $KB = KM + BM = \frac{9}{40}h + \frac{41}{40}h = \frac{5}{4}h$, $AC = \sqrt{AK^2 + CK^2} = \sqrt{\frac{16}{25}h^2 + h^2} = \frac{h}{5}\sqrt{41}$, $BC = \sqrt{BK^2 + CK^2} = \sqrt{\frac{25}{16}h^2 + h^2} = \frac{h}{4}\sqrt{41}$; $\frac{AC}{BC} = \frac{h\sqrt{41}}{5} : \frac{h\sqrt{41}}{4} = \frac{4}{5}$.

EJEMPLO 8. En el triángulo isósceles ABC el ángulo C en el vértice es igual a $100°$. Se han trazado dos rayos: uno que comienza en el punto A bajo un ángulo de $30°$ con relación al rayo AB y, el segundo, que comienza en el punto B bajo un ángulo de $20°$ respecto del BA. Estos rayos concurren en el punto M perteneciente al triángulo ABC. Hallemos los ángulos ACM y BCM.

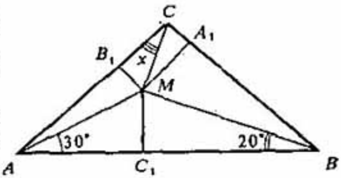


Fig. 30

SOLUCION. Unamos los puntos M y C y designemos el ángulo ACM con x. Del punto M tracemos perpendiculares a los lados del triángulo: $MC_1 \perp AB$, $MB_1 \perp AC$, $MA_1 \perp BC$ (fig. 30). Introduzcamos un parámetro auxiliar, p.ej., $CM = a$ y calculamos MC_1 con dos procedimientos, es decir, empleamos MC_1 como elemento de referencia.

Del triángulo CMB_1, hallamos: $MB_1 = MC \operatorname{sen} x = a \operatorname{sen} x$. Como $\angle ACB = 100°$ y, de acuerdo con el planteamiento, el triángulo ABC es isósceles, $\angle CAB = \angle ABC = 40°$ y, por consiguiente, $\angle CAM = 10°$. Del triángulo AMB_1, hallamos: $AM = \frac{MB_1}{\operatorname{sen} 10°} = \frac{a \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 10°}$. Por fin, del $\triangle AMC_1$, tenemos: $MC_1 = AM \operatorname{sen} 30° = \frac{a \operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen} 10°}$.

Analicemos el triángulo CMA_1. En él, $\angle MCA_1 = 100° - x$. De modo que $MA_1 = CM \operatorname{sen} (100° - x) = a \operatorname{sen} (100° - x)$.

Como $\angle MBC = 40° - 20° = 20°$, los triángulos BMC_1 y BMA_1 son iguales y, por consiguiente, $MC_1 = MA_1 = a \operatorname{sen} (100° - x)$.

Igualando las expresiones halladas para MC_1, obtenemos la ecuación trigonométrica $\frac{a \operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen} 10°} = a \operatorname{sen} (100° - x)$.

De esta ecuación hallamos consecutivamente: $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} (100° - x) \cdot \operatorname{sen} 10°$, $\operatorname{sen} x = \cos (90° - x) - \cos (110° - x)$, $\cos (110° - x) = 0$, $x = 20°$.

§ 2. TRIÁNGULOS Y CUADRILÁTEROS

EJEMPLO 1. Las bases de un trapecio son a y b. Hallemos la largura del segmento que une el punto medio de las diagonales (fig. 31).

SOLUCIÓN. Como P es el punto medio de la diagonal AC y K, el punto medio de la diagonal BD, los puntos P y K yacen en la línea media EF del trapecio (teorema 2c). Como EK es la línea media del triángulo ABD, $EK = \frac{a}{2}$; ya que EP es la línea media del triángulo ABC, $EP = \frac{b}{2}$. Como resultado, obtenemos: $PK = EK - EP = \frac{a-b}{2}$.

EJEMPLO 2. Conociendo las medianas m_a, m_b y m_c del triángulo ABC, hallemos el lado $AC = b$.

SOLUCIÓN. Según la propiedad de las medianas en el triángulo (teorema 3a), ellas concurren en un mismo punto M y en él se divi-

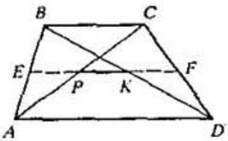


Fig. 31

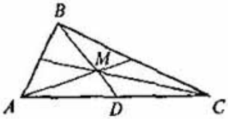


Fig. 32

den con una razón 2 : 1, contando desde el vértice (fig. 32). Por ello, en el $\triangle AMC$ conocemos dos lados: $AM = \frac{2}{3} m_a$, $MC = \frac{2}{3} m_c$ y la mediana $MD = \frac{1}{3} m_b$.

Consideremos el $\triangle AMC$. Duplicando su mediana MD, convertimos el triángulo en el paralelogramo $AMCP$ (fig. 33). Entonces, de acuerdo con el teorema 11 $AC^2 + MP^2 = 2AM^2 + 2MC^2$, es decir, $b^2 + \frac{4}{9} m_b^2 = 2 \cdot \frac{4}{9} m_a^2 + 2 \cdot \frac{4}{9} m_c^2$, de donde hallamos: $b = \frac{2}{3} \sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2}$.

EJEMPLO 3. En los lados AB y BC del triángulo ABC, fuera de él, se han construido los cuadrados $ABDE$ y $BCKM$. Demostremos que el segmento DM es dos veces mayor que la mediana BP del triángulo ABC (fig. 34).

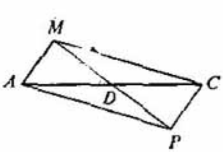


Fig. 33

SOLUCIÓN. Como hay que demostrar que $DM = 2BP$, es conveniente duplicar la mediana BP y convertir el ΔABC en el paralelogramo $ABCT$ y, a continuación, demostrar que $DM = BT$. Para demostrar que los segmentos DM y BT son iguales, hay que examinar éstos como los lados de dos triángulos y demostrar la igualdad de éstos. En correspondencia con el plan que nos hemos planteado, resolvemos el problema.

Dupliquemos la mediana BP convirtiendo el ΔABC en el paralelogramo $ABCT$ (fig. 35).

Examinemos los triángulos DMB y BCT. Tenemos: $BM = BC$ como los lados del cuadrado $BMKC$; $DB = CT$ (con mayor detalle: $DB = AB$ como los lados de un cuadrado y $AB = CT$ como los lados opuestos de un paralelogramo, es decir, $DB = CT$); $\angle DBM = \angle BCT$ (como ángulos con lados perpendiculares entre sí). Esto

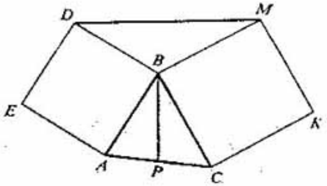


Fig. 34

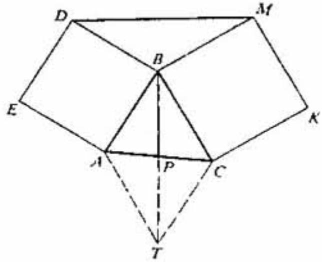


Fig. 35

significa que el $\triangle DBM = \triangle BCT$ (por los dos lados y el ángulo entre ellos) y, por lo tanto, $DM = BT$.

Como $BT = 2BP$, de $DM = BT$ se desprende que $DM = 2BP$.

EJEMPLO 4. La altura trazada a la hipotenusa de un triángulo rectángulo la divide en partes: 9 y 16 cm. Del vértice del ángulo agudo mayor del triángulo se ha trazado una recta que pasa por el punto medio de la altura. Hallemos la largura del segmento de dicha recta en el interior del triángulo rectángulo dado (fig. 36).

SOLUCIÓN. Tenemos: $CH^2 = AH \cdot BH$ (teorema 6a), por ello, $CH^2 = 9 \cdot 16$, es decir, $CH = 12$ cm. Del $\triangle ADH$ hallamos: $AD = \sqrt{9^2+6^2} = 3\sqrt{13}$ cm. Tracemos $HM \parallel AK$ y hagamos $DK = x$. Como DK es la línea media del $\triangle HCM$, $HM = 2x$. De la semejanza de los triángulos HMB y AKB llegamos a la conclusión de que $\frac{HM}{AK} = \frac{BH}{AB}$, es decir, $\frac{2x}{x+3\sqrt{13}} = \frac{16}{25}$, de donde $x = \frac{24\sqrt{13}}{17}$ y $AK = 3\sqrt{13} + \frac{24\sqrt{13}}{17} = \frac{75\sqrt{13}}{17}$.

Así, pues, $AK = \frac{75\sqrt{13}}{17}$ cm.

EJEMPLO 5. En un triángulo con los lados de 10, 17 y 21 cm está inscrito un rectángulo de modo que dos de sus vértices se encuentran en un lado del triángulo y los otros dos, en los otros dos lados del triángulo. Hallemos los lados del rectángulo si sabemos que su perímetro es igual a 22,5 cm.

SOLUCIÓN. Ante todo determinamos el tipo del triángulo. Tenemos: $10^2 = 100$; $17^2 = 289$, $21^2 = 441$. Como $21^2 > 10^2 + 17^2$, el triángulo es obtusángulo (teorema 9) y, por lo tanto, es posible inscribir el rectángulo sólo por un procedimiento: situando dos vértices en el lado mayor (fig. 37).

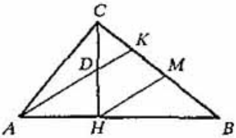


Fig. 36

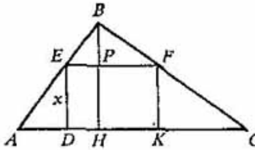


Fig. 37

Hallemos la altura BH del triángulo ABC. Aplicando el método que empleamos en el ejemplo 4 del § 1 (o bien haciendo uso de la fórmula obtenida en dicho ejemplo), hallamos: $BH = 8$ cm.

Hagamos $ED = x$. Entonces, $EF = 11{,}25 - x$ (ya que el perímetro del rectángulo $DEFK$ es igual a 22,5 cm), $BP = 8 - x$.

Los triángulos BEF y ABC son semejantes, es decir, $\frac{EF}{AC} = \frac{BP}{BH}$ (en los triángulos semejantes la razón entre las correspondientes alturas es igual a la razón de semejanza), o sea, $\frac{11{,}25 - x}{21} = \frac{8 - x}{8}$, de donde hallamos: $x = 6$.

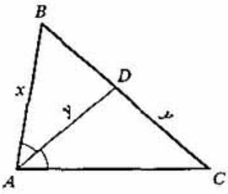


Fig. 38

Así, pues, los lados del rectángulo son 6 y 5,25 cm.

EJEMPLO 6. En el triángulo ABC se conoce que el ángulo A es dos veces mayor que el ángulo C, el lado BC es 2 cm mayor que el lado AB, en tanto que $AC = 5$ cm. Hallemos AB y BC.

SOLUCIÓN. *I procedimiento*. Tracemos la bisectriz AD del ángulo A. Entonces, obtenemos que $\angle BAD = \angle DAC = \angle ACB$ (fig. 38).

En el $\triangle ADC$ los ángulos en la base son iguales, es decir, este triángulo es isósceles: $AD = DC$. Hagamos $AB = x$, $AD = DC = y$. Entonces $BC = x + 2$, $BD = x + 2 - y$.

Los triángulos ABD y ABC son semejantes, ya que $\angle BAD = \angle BCA$ y $\angle B$ es común para dichos triángulos. De la semejanza de los triángulos, llegamos a la conclusión que $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}$, es decir, $\frac{x}{x+2} = \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5}$.

Para hallar x e y se ha obtenido un sistema de dos ecuaciones con dos variables: $\begin{cases} \dfrac{x}{x+2}=\dfrac{y}{5}, \\ \dfrac{x+2-y}{x}=\dfrac{y}{5}, \end{cases}$ de donde $\begin{cases} 5x=xy+2y, \\ 5x+10-5y=xy. \end{cases}$

Sustrayendo la segunda ecuación de la primera, obtenemos: $5y-10=2y$ o $y=\frac{10}{3}$. Esto significa que $\frac{x}{x+2}=\frac{2}{3}$, o sea, $x=4$.

Así, pues, $AB=4$ cm, $BC=6$ cm.

II procedimiento. Hagamos $\angle C=t$, entonces $\angle A=2t$, $\angle B=180°-3t$. Hagamos, asimismo, $AB=x$, entonces $BC=x+2$. Según el teorema de los senos (teorema 8), tenemos: $\frac{x}{\operatorname{sen} t}=\frac{x+2}{\operatorname{sen} 2t}=$ $=\frac{5}{\operatorname{sen}(180°-3t)}$.

Hemos obtenido un sistema de dos ecuaciones con dos variables x y t: $\begin{cases} \dfrac{x}{\operatorname{sen} t}=\dfrac{x+2}{\operatorname{sen} 2t}, \\ \dfrac{x}{\operatorname{sen} t}=\dfrac{5}{\operatorname{sen} 3t} \end{cases}$ (aquí hemos hecho uso de que $\operatorname{sen}(180°-$ $-3t)=\operatorname{sen} 3t$).

Resolvamos este sistema. De la segunda ecuación obtenemos: $x=\frac{5\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen} 3t}=\frac{5\operatorname{sen} t}{3\operatorname{sen} t-4\operatorname{sen}^3 t}=\frac{5}{3-4\operatorname{sen}^2 t}$. De la primera ecuación del sistema hallamos: $\frac{x+2}{x}=\frac{\operatorname{sen} 2t}{\operatorname{sen} t}$, es decir, $1+\frac{2}{x}=2\cos t$. Poniendo en lugar de x su expresión con t, hallada más arriba, obtenemos: $1+\frac{6-8\operatorname{sen}^2 t}{5}=2\cos t$. Hagamos en esta ecuación trigonométrica $\cos t=z$. Obtendremos: $1+\frac{6-8(1-z^2)}{5}=2z$, de donde $z_1=\frac{3}{4}$, $z_2=\frac{1}{2}$, es decir, $\cos t=\frac{3}{4}$ o bien $\cos t=\frac{1}{2}$.

Si $\cos t=\frac{3}{4}$, de $1+\frac{2}{x}=2\cos t$, hallamos: $x=4$.

Si $\cos t=\frac{1}{2}$, de $1+\frac{2}{x}=2\cos t$, hallamos: $1+\frac{2}{x}=1$, lo que no puede ser.

Así, pues, $AB=4$ cm, $BC=6$ cm.

OBSERVACIÓN. La relación $\cos t=\frac{1}{2}$ quiere decir que $t=60°$, entonces en el triángulo ABC obtenemos que $\angle C=60°$, $\angle A=120°$, lo que no puede tener lugar.

EJEMPLO 7. K es el punto medio del lado AD del rectángulo $ABCD$. Hallemos el ángulo entre BK y la diagonal AC si sabemos que $AD : AB = \sqrt{2}$.

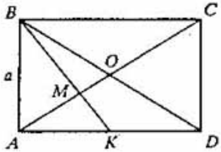


Fig. 39

SOLUCIÓN. Empleemos el método del parámetro auxiliar (véase el ejemplo 7 del § 1). Hagamos $AB = a$ y, entonces, $AD = a\sqrt{2}$. He aquí el plan para resolver el problema: expresemos con a todos los lados del triángulo AMK (fig. 39) y apliquemos el teorema de los cosenos para el lado AK. Esto nos permite calcular el coseno del ángulo AMK que buscamos; designémoslo con x.

Los segmentos AO y BK son las medianas del triángulo ABD. De modo que $MK = \frac{1}{3} BK$, $AM = \frac{2}{3} AO$ (teorema 3a). Tenemos:

$$MK = \frac{1}{3} BK = \frac{1}{3}\sqrt{AB^2 + AK^2} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6},$$

$$AM = \frac{2}{3} AO = \frac{1}{3} AC = \frac{1}{3}\sqrt{AD^2 + CD^2} = \frac{1}{3}\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = \\ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

En el triángulo AMK, tenemos: $AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $MK = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Según el teorema de los cosenos (teorema 7) $AK^2 = AM^2 + MK^2 - 2AM \cdot MK \cdot \cos x$, es decir, $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} \cos x$, a continuación, $\frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{2}}{3} \cos x$, de donde hallamos: $\cos x = 0$ y, por consiguiente, $x = 90°$.

Así, pues, el ángulo entre BK y AC es recto.

EJEMPLO 8. Demostremos que en todo triángulo ABC la distancia desde el ortocentro hasta el vértice B es dos veces mayor que la distancia desde el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo hasta el lado AC.

SOLUCIÓN. Sea ABC un triángulo acutángulo, el punto H el ortocentro, el punto O, el centro de la circunferencia circunscrita, los segmentos BD y AP, las alturas, K y L, los puntos medios de los lados, OK y OL, perpendiculares a los lados (fig. 40).

Los triángulos ABH y KOL son semejantes ($BH \parallel OK$, $AH \parallel OL$, $AB \parallel LK$), o sea, $\frac{BH}{OK} = \frac{AB}{LK}$. El segmento LK es la línea media del $\triangle ABC$ y, por consiguiente, $\frac{AB}{LK} = 2$. Pero, entonces, $\frac{BH}{OK} = 2$, que es lo que queríamos demostrar.

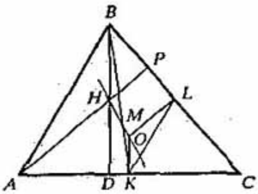


Fig. 40

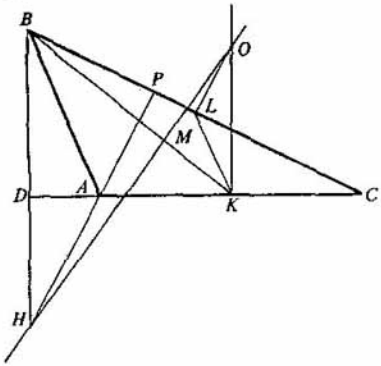


Fig. 41

Sea ABC un triángulo obtusángulo no isósceles, con la particularidad de que se han conservado las designaciones del caso anterior (fig. 41).

De la semejanza de los triángulos ABH y KOL se desprende que $\frac{BH}{OK} = \frac{AB}{LK} = 2$, de forma que, $BH = 2OK$.

En las figs. 40 y 41 la línea de Euler está representada como OH (véase el ejercicio 54).

EJEMPLO 9. Por el centroide de un triángulo regular, en el plano de éste, se ha trazado una recta. Demostremos que la suma de los cuadrados de las distancias desde los vértices del triángulo hasta dicha recta no depende de su elección.

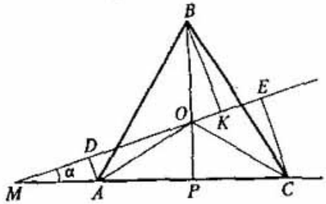


Fig. 42

SOLUCIÓN. Sea que la recta a la que nos referimos forma con la base AC del triángulo ABC el ángulo α (fig. 42). Hagamos $AO = BO = CO = a$, expresemos las perpendiculares a dicha recta AD, BK y CE con a y α y, seguidamente, demostremos que la expresión $AD^2 + BK^2 + CE^2$ es constante con toda α.

$\angle OAC = 30°$, por lo que $\angle MAO = 150°$ y, entonces, $\angle DOA = 180° - (\alpha + 150°) = 30° - \alpha$. Del $\triangle DOA$, hallamos: $AD = OA$ sen $\angle AOD = a$ sen $(30° - \alpha)$. $\angle BOK = \angle MOP = 90° - \alpha$ (del $\triangle MOP$). Del $\triangle BOK$, hallamos: $BK = BO \times$ $\times$ sen$\angle BOK = a$ sen $(90° - \alpha) = a \cos \alpha$.

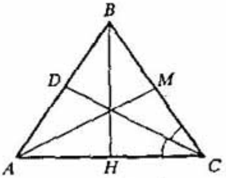


Fig. 43

$\angle POE = 90° + \alpha$ (como externo para el $\triangle MOP$). $\angle POC = 60°$, entonces, $\angle COE = \angle POE - \angle POC = (90° + \alpha) - 60° = 30° + \alpha$. Del $\triangle COE$, hallamos: $CE = CO$ sen $\angle COE = a \times$ $\times$ sen$(30° + \alpha)$.

Tenemos: $AD^2 + BK^2 + CE^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 (30° - \alpha) + a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \operatorname{sen}^2 (30° + \alpha) = a^2 \left(\frac{1 - \cos(60° - 2\alpha)}{2} + \cos^2 \alpha + \frac{1 - \cos(60° + 2\alpha)}{2}\right) =$

$= a^2 \left(1 - \frac{\cos(60° + 2\alpha) + \cos(60° - 2\alpha)}{2} + \cos^2 \alpha\right) = a^2 \left(1 - \cos 60° \cos 2\alpha + \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right) = a^2 \left(1 - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha\right) = \frac{3}{2} a^2.$

Así, pues, con toda α tenemos: $AD^2 + BK^2 + CE^2 = \frac{3}{2} a^2$.

EJEMPLO 10. Hallemos la dependencia entre los lados a, b y c del triángulo ABC si sabemos que la mediana AM, la altura BH y la bisectriz CD se cortan en un mismo punto (fig. 43).

SOLUCIÓN. Según el teorema de Ceva (teorema 10), tenemos: $\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CH}{AH} = 1$. Como AM es la mediana, $BM = CM$ y $\frac{BM}{CM} = 1$. Como CD es la bisectriz, $\frac{AD}{BD} = \frac{b}{a}$ (teorema 5). Como resultado, la relación dada toma la forma: $\frac{b}{a} \cdot \frac{CH}{AH} = 1$, es decir, $\frac{CH}{AH} = \frac{a}{b}$.

Hagamos $CH = at$, $AH = bt$. Entonces, por un lado $at + bt = b$, o sea, $t = \frac{b}{a+b}$; por otro, empleando BH como elemento de referencia, del $\triangle ABH$ obtenemos: $BH^2 = c^2 - b^2t^2$ y del $\triangle BHC$: $BH^2 = a^2 - a^2t^2$. Así, pues, $c^2 - b^2t^2 = a^2 - a^2t^2$, de donde $t^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}$.

Poniendo en la última igualdad en lugar de t su valor $t = \frac{b}{a+b}$, obtenemos la dependencia buscada entre los lados a, b y c: $\frac{b^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}$, es decir, $\frac{b^2}{a+b} = \frac{a^2 - c^2}{a - b}$.

PROBLEMAS PARA EL TRABAJO INDIVIDUAL

I. Triángulo rectángulo

1. Demostrar que en un triángulo rectángulo, la bisectriz del ángulo recto divide por la mitad el ángulo entre la mediana y la altura trazadas desde ese mismo vértice.

2. La mediana trazada hacia la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide el ángulo recto en la razón 1 : 2 y es igual a m. Hallen los lados del triángulo.

3. Un punto tomado en la hipotenusa de un triángulo rectángulo y situado a una misma distancia de sus catetos, divide la hipotenusa en segmentos de 30 y 40 cm. Hallen los catetos.

4. Hallen la hipotenusa de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo con catetos de 18 y 24 cm.

5. Hallen la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo con catetos a y b.

6. Del vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se ha trazado la bisectriz que divide la hipotenusa en los segmentos m y n. Hallen la altura trazada a la hipotenusa.

7. En un triángulo rectángulo las medianas trazadas a los catetos son iguales a $\sqrt{52}$ y $\sqrt{73}$ cm. Hallen la hipotenusa.

8. El perímetro de un triángulo rectángulo es igual a 60 cm y la altura trazada a la hipotenusa, igual a 12 cm. Hallen los lados del triángulo.

9. En el triángulo rectángulo ABC, desde el vértice C del ángulo recto, se han trazado la bisectriz CK y la mediana CM. Hallemos los catetos si $CM = m$ y $KM = n$.

10. En un triángulo rectángulo hay que hallar el ángulo entre la mediana y la bisectriz trazadas desde el vértice del ángulo agudo, igual a α.

11. En el triángulo rectángulo ABC se han trazado las bisectrices de los ángulos agudos AD y BK. Hallen los ángulos del triángulo si sabemos que $AB^2 = AD \cdot BK$.

12. Demuestren que si la altura y la mediana trazadas desde uno de los vértices de un triángulo isósceles yacen dentro de éste y forman con sus lados laterales ángulos iguales, dicho triángulo es rectángulo.

II. Triángulo isósceles

13. Demuestren que si en un triángulo la razón de las tangentes de dos ángulos es igual a la razón de los cuadrados de los senos de estos ángulos, el triángulo es isósceles o rectángulo.

14. Demuestren que si en un triángulo se verifican las relaciones $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$, éste es isósceles.

15. La base de un triángulo isósceles es igual a $4\sqrt{2}$ cm, la mediana trazada al lado lateral es igual a 5 cm. Hallen el lado lateral.

16. El lado lateral de un triángulo isósceles es igual a 4 cm, la mediana trazada al lado lateral es igual a 3 cm. Hallen la base del triángulo.

17. La base de un triángulo isósceles es igual a 12 cm, mientras que el lado lateral, a 18 cm. A los lados laterales se han trazado alturas. Calcular la largura del segmento cuyos extremos son las bases de las alturas.

18. La base de un triángulo isósceles es igual a 12 cm y el lado lateral, a 18 cm. A los lados laterales se han trazado bisectrices. Calculen la largura de segmento cuyos extremos son las bases de las bisectrices.

19. La suma de dos alturas diferentes de un triángulo isósceles es igual a l, el ángulo en el vértice, α. Hallen el lado lateral.

20. En la altura BH del triángulo isósceles ABC ($AB = BC$) se ha tomado el punto de modo que los ángulos AMB, BMC y AMC son iguales. ¿En qué razón, contando desde el vértice, el punto M divide la altura si el ángulo junto a la base del triángulo es igual a α?

21. El ángulo junto a la base de un triángulo isósceles es igual a α. Hallen la razón entre la base y la mediana trazada al lado lateral.

22. Hallen los ángulos de un triángulo isósceles si sabemos que el ortocentro divide por la mitad la altura trazada a la base de la figura.

23. Las rectas l_1, l_2 y l_3 son paralelas, con la particularidad de que l_2 yace entre l_1 y l_3 y está distanciada de ellas a p y q. respectivamente. Hallen el lado de un triángulo regular cuyos vértices yacen en las rectas dadas (uno en cada una de ellas).

24. En el triángulo isósceles ABC ($AB = BC$) en el lado AB se ha tomado el punto D y en el BC, el punto E, de modo que $BD = CE$. Demuestren que un conjunto de los puntos medios de todos los segmentos DE coincide con la línea media del triángulo ABC.

25. En un triángulo isósceles el ángulo en el vértice es igual a 36° y la base a a. Hallen los lados laterales del triángulo.

26. En el triángulo isósceles ABC ($AB = BC$), en el lado BC se ha tomado el punto D de forma que $BD : DC = 1 : 4$. Hallen $BM : ME$, donde BE es la altura del triángulo y M, el punto de intersección de BE y AD.

27. La base de un triángulo isósceles es igual a a, el ángulo en el vértice, a 2α. Hallen la largura de la bisectriz trazada al lado lateral.

28. Por el vértice de un triángulo regular se ha trazado un rayo que divide la base como 2 : 1. ¿Qué ángulos forma este rayo con los lados laterales del triángulo?

29. El ángulo en la base de un triángulo isósceles es igual a $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Hallen el ángulo entre la mediana y la bisectriz trazadas al lado lateral.

30. Hallen el ángulo en el vértice del triángulo isósceles si la mediana, trazada al lado lateral, forma con la base el ángulo $\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}$.

31. En el triángulo isósceles ABC el ángulo B es igual a 110°. En el interior del triángulo se ha tomado el punto M de modo que $\angle MAC = 30°$, $\angle MCA = 25°$. Hallen el ángulo BMC.

III. Triángulo arbitrario

32. Demuestren que si dos lados y la altura de un triángulo ocutángulo son iguales, respectivamente, a dos lados y a la altura de otro triángulo ocutángulo, semejantes triángulos son iguales (considerar dos casos).

33. Demuestren que si dos lados y la mediana de un triángulo son iguales, respectivamente, a dos lados y a la mediana de otro triángulo, semejantes triángulos son iguales (consideren dos casos).

34. Demuestren que en todo triángulo la bisectriz bien coincide con la mediana y la altura, trazadas desde un mismo vértice, o bien yace entre ellas.

35. Demuestren que en todo triángulo la suma de las medianas es mayor que $\frac{3}{4}$ del perímetro, pero menor que éste.

36. Por el centroide del triángulo regular ABC se ha trazado la recta l que cruza los lados AB y BC. Demostrar que la suma de las distancias desde A y C hasta l es igual a la distancia desde B hasta l.

37. En el triángulo ABC el ángulo B es igual a 115°. Desde el punto medio del lado AC se ha trazado una perpendicular a AC hasta su intersección con el lado BC en el punto D. El segmento AD divide el ángulo A como 5 : 3, contando desde el lado AC. Hallen los ángulos A y C del triángulo ABC.

38. La bisectriz del ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en segmentos de largura 2 y 4 cm y la altura, trazada a ese mismo lado, es igual a $\sqrt{15}$ cm. Hallen los lados del triángulo y determinen su tipo.

39. Hallen la razón entre la suma de los cuadrados de las medianas de un triángulo y la suma de los cuadrados de sus lados.

40. Determinen el tipo del triángulo si sabemos que sus medianas están ligadas con la igualdad $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$.

41. Dos lados de un triángulo son iguales a a y b y las medianas, trazadas a estos lados, son perpendiculares entre sí. Hallen el tercer lado del triángulo.

42. En el triángulo ABC se ha trazado la bisectriz AD. Hallen el lado BC si sabemos que $AC = b$, $AB = c$ y $AD = BD$.

43. En el triángulo ABC es conocido que $BC = 12$ cm, $AC = 8$ cm y el ángulo A es dos veces mayor que el ángulo B. Hallen AB.

44. La altura del triángulo es igual a 6 cm y divide el ángulo como 2 : 1 y la base de la figura, en segmentos, de los cuales el menor es igual a 3 cm. Hallen los lados del triángulo.

45. La altura del triángulo divide los ángulos como 2 : 1 y la base, en segmentos, la razón entre los cuales es igual a k ($k > 1$). Hallen el ángulo mayor en la base del triángulo.

46. En el triángulo acutángulo ABC el ángulo agudo entre las alturas AD y CE es igual a α. Hallen AC si $AD = a$ y $CE = b$.

47. La base de un triángulo es igual a 4. La mediana, trazada a la base, es igual a $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ y uno de los ángulos en la base, a 15°. Hallen el ángulo agudo entre la mediana y la base.

48. Haciendo uso del teorema de Ceva demuestren, que:

a) las medianas del triángulo se cortan en un mismo punto;

b) las bisectrices de un triángulo se intersecan en un mismo punto;

c) las alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto.

49. La recta DE es paralela a la base del triángulo ABC, con la particularidad de que el punto D yace en el lado AB y el E, en el lado BC. Demuestren que AE, CD y la mediana BM se cortan en un mismo punto.

50. Demuestren que si las larguras de los lados de un triángulo forman una progresión aritmética, el centro de la circunferencia inscrita en dicho triángulo y el centroide de éste yacen en una recta paralela al lado del triángulo de largura media.

51. AD es la altura del triángulo ABC, el punto H es el ortocentro. Demuestren que $DC \cdot DB = AD \cdot DH$.

52. En el triángulo ABC el ángulo A es igual a 30° y el B, a 50°. Demuestren que los lados del triángulo están ligados con la relación $c^2 = b(a + b)$.

53. Demuestren que en todo triángulo la diferencia entre la suma de los cuadrados de las larguras de cualesquiera dos de sus lados y el producto de las larguras de estos lados, multiplicado por el coseno del ángulo entre ellos, es una magnitud constante (para el triángulo dado).

54. Demuestren que en todo triángulo el ortocentro, el centroide y el centro de la circunferencia circunscrita yacen en una misma recta (*recta de Euler*).

55. En los triángulos ABC y $A'B'C'$ los ángulos B y B' son iguales, en tanto que la suma de los ángulos A y A' constituye 180°. Demuestren que los lados de estos dos triángulos están ligados con la relación $aa' = bb' + cc'$.

56. En el triángulo ABC los ángulos A, B y C están relacionados como 4 : 2 : 1. Demuestren que los lados del triángulo están ligados con la igualdad $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

57. La altura, mediana y bisectriz trazadas desde uno de los vértices de un triángulo dividen el ángulo en este vértice en 4 partes iguales. Hallen los ángulos del tri ngulo.

58. CD es la altura del triángulo ABC. Hallen la dependencia entre los ángulos A y B si sabemos que $CD^2 = AD \cdot DB$.

59. En el triángulo ABC el ángulo A es igual a α y el B, a β, la mediana BD cruza la bisectriz CE en el punto K. Hallen $CK : KE$.

IV. Paralelogramo

60. Demuestren que si en un cuadrilátero las diagonales son las bisectrices de los ángulos, el cuadrilátero es un rombo.

61. En un paralelogramo con lados a y b ($a > b$) se han trazado las bisectrices de los ángulos internos. Definan el tipo de cuadrilátero formado durante la intersección de las bisectrices y hallen la largura de sus diagonales.

62. La altura de un rombo divide su lado en los segmentos m y n. Hallen las diagonales del rombo.

63. La perpendicular trazada desde el vértice de un paralelogramo hasta su diagonal divide ésta en segmentos de 6 y 15 cm. Hallen los lados y las diagonales del paralelogramo si sabemos que la diferencia de los lados es igual a 7 cm.

64. Dos alturas de un paralelogramo, trazadas desde el vértice del ángulo obtuso, son iguales a p y q, respectivamente, el ángulo entre ellas es igual a α. Hallen la diagonal mayor del paralelogramo.

65. La diagonal de un rectángulo divide su ángulo en la razón $m : n$. Hallen la razón entre el perímetro del rectángulo y su diagonal.

66. El ángulo agudo de un paralelogramo es igual a α y sus lados, a a y b. Hallen las tangentes de los ángulos agudos, que su diagonal mayor forma con los lados del paralelogramo.

67. Hallen el ángulo agudo del rombo $ABCD$ si una recta, trazada por el vértice A, divide el ángulo BAD en la razón $1 : 3$ y el lado BC, en la razón $3 : 5$.

68. La razón entre el perímetro de un rombo y la suma de sus diagonales es igual a k. Hallen los ángulos del rombo.

69. Las diagonales de un paralelogramo son proporcionales a sus lados no paralelos. Demuestren que los ángulos entre las diagonales son iguales a los ángulos del paralelogramo.

70. En el rectángulo $ABCD$ la base AD está dividida por los puntos M y P en tres partes iguales. Demuestren que la suma de los ángulos AMB, APB y ADB es igual a 90° si sabemos que $AD = 3AB$.

71. Los lados de un paralelogramo son iguales a a y b ($a > b$). La diagonal menor forma con el lado menor un ángulo obtuso y con el lado mayor el ángulo α. Hallen la diagonal mayor del paralelogramo.

72. Los lados de un paralelogramo están ligados con la razón $p : q$ y las diagonales, como $m : n$. Hallen los ángulos de la figura.

73. La razón entre el perímetro de un paralelogramo y su diagonal mayor es igual a k. Hallen los ángulos del paralelogramo si se sabe que su diagonal mayor divide el ángulo de la figura en la razón $1 : 2$.

V. Trapecio

74. Demuestren que si los lados de un trapecio son, respectivamente, iguales a los lados de otro, los trapecios son iguales.

75. Demuestren el teorema: para que el trapecio sea isósceles es necesario y suficiente: a) que los ángulos en la base sean iguales; b) que las diagonales sean iguales.

76. Demuestren que las bisectrices de los ángulos adyacentes al lado lateral del trapecio se cruzan formando un ángulo recto y que el punto en que se cortan yace en la línea media del trapecio.

77. La suma de los ángulos en la base de un trapecio es igual a 90°. Demuestren que el segmento que une el punto medio de las bases es igual a la semidiferencia de las bases.

78. Las diagonales de un trapecio son iguales y perpendiculares entre sí, la altura es igual a 15 cm. Hallen la largura de la línea media del trapecio.

79. Una de las bases de un trapecio es igual a 24 cm, y la distancia entre los puntos medios de las diagonales es igual a 4 cm. Hallen la otra base.

80. Uno de los ángulos de un trapecio es igual a 30°, los lados laterales son perpendiculares. Hallen el lado lateral menor del trapecio si su línea media es igual a 10 cm y una de las bases, a 8 cm.

81. En un trapecio rectángulo las bases y el lado lateral menor son iguales a a, b y c, respectivamente. Hallen la distancia desde el punto de intersección de las diagonales hasta la base y el lado lateral menor.

82. Las bisectrices de los ángulos obtusos en la base de un trapecio se cruzan en su otra base y tienen unas larguras de 13 y 15 cm. Hallen los lados del trapecio si su altura es igual a 12 cm.

83. La altura de un trapecio isósceles es igual a h, el ángulo agudo entre las diagonales es 2α. Hallen la largura de la base media del trapecio.

84. En el trapecio $ABCD$ los ángulos A y B son rectos, $AB = 5$ cm, $BC = 1$ cm, $AD = 4$ cm. En el lado AB se ha tomado el punto M de modo que el ángulo AMD sea dos veces mayor que el ángulo BMC. Hallen la razón $AM : MB$.

85. El ángulo en el vértice A del trapecio $ABCD$ es igual a α, el lado lateral AB es dos veces mayor que su base menor BC. Hallen el ángulo BAC.

86. La base mayor de un trapecio es igual a a, los lados laterales son iguales a b y c ($b < c$) y la razón de los ángulos en la base mayor es como $2 : 1$. Hallen la base menor.

87. Las diagonales AC y BD del trapecio isósceles $ABCD$ ($AD \parallel BC$) concurren en el punto O, siendo $\angle AOD = 60°$. Demuestren que K, M, P, que son los puntos medios de los segmentos AO, BO y CD, corresponden a los vértices de un triángulo regular.

88. Demuestren que la suma de los cuadrados de las diagonales de un trapecio es igual al producto duplicado de sus bases, adicionando la suma de los cuadrados de los lados laterales.

89. Demuestren que la recta que pasa por el punto de intersección de las continuaciones de los lados laterales del trapecio y el punto de intersección de sus diagonales, dividen las bases del trapecio por la mitad.

90. En un trapecio con bases a y b se ha trazado por el punto de intersección de las diagonales una recta paralela a las bases. Hallen la largura del segmento de esta recta que se encuentra entre los lados laterales del trapecio.

91. En el trapecio $ABCD$ cada una de las bases AD y BC se continúa hacia los dos lados. Las bisectrices de los ángulos externos A y B se cortan en el punto K y las bisectrices de los ángulos externos C y D, en el punto E. Hallen el perímetro del trapecio si $KE = 20$ cm.

92. Por el punto O de intersección de las diagonales del trapecio isósceles $ABCD$ ($AD \parallel BC$), cuyas diagonales son perpendiculares entre sí, se ha trazado la recta MK, perpendicular al lado CD (el punto M yace en AB, el punto K, en CD). Hallen MK, si $AD = 40$ cm, $BC = 30$ cm.

VI. Diferentes problemas

93. En el cuadrilátero $ABCD$, P, K, E y M son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA. Demuestren que el cuadrilátero $PKEM$ es un paralelogramo.

94. En los catetos AC y BC del triángulo rectángulo ABC se han construido (fuera del triángulo) los cuadrados $ADKC$ y $CEMB$. De los puntos D y M se bajan las perpendiculares DH y MP sobre la continuación de la hipotenusa AB. Demuestren que $DH + MP = AB$.

95. En los lados de un paralelogramo (fuera de él) se han construido cuadrados. Sus centros están consecutivamente unidos. Demuestren que el cuadrilátero obtenido es un cuadrado.

96. En un triángulo rectángulo con catetos a y b está inscrito un cuadrado que tiene con el triángulo el ángulo recto común. Hallen el perímetro del cuadrado.

97. En un triángulo rectángulo está inscrito un rombo de forma que todos sus vértices yacen en los lados del triángulo y el ángulo igual a 60° es común para el triángulo y el rombo. Hallen los lados del triángulo si el lado del rombo es igual a 6 cm.

98. En un triángulo está inscrito un rombo de forma que uno de los ángulos es común para las dos figuras, en tanto que el vértice opuesto del rombo divide el lado del triángulo en segmentos entre los que la razón es 2 : 3. Hallen los lados del triángulo entre los que yace el ángulo común del triángulo y el rombo si las diagonales del rombo son m y n.

99. En un triángulo con lados laterales 9 y 15 cm está inscrito un paralelogramo de forma que uno de sus lados de 6 cm de largura yace en la base del triángulo y sus diagonales son, respectivamente, paralelas a los lados laterales del triángulo. Hallen el otro lado del paralelogramo y la base del triángulo.

100. En el cuadrado $ABCD$ está inscrito el triángulo isósceles AKM de forma que el punto K yace en el lado BC, el punto M, en el CD y $AM = AK$. Hallen el ángulo MAD si sabemos que la $\operatorname{tg} \angle AKM = 3$.

101. En el triángulo regular ABC está inscrito el triángulo regular DEK de forma que el punto D yace en el lado BC, el punto E, en AC y el punto K en AB. Hallen $AB : DE$ si sabemos que $\angle DEC = \alpha$.

102. Demuestren que los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero convexo y el segmento que une los puntos medios de sus diagonales, se cruzan en un mismo punto y se dividen por él en la mitad.

103. Demuestren que en un cuadrilátero convexo los puntos medios de las diagonales y de los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos yacen en una misma recta.

104. Demuestren que si en un cuadrilátero la suma de los cuadrados de los lados opuestos son iguales, sus diagonales son perpendiculares entre sí.

105. Demuestren que si en un cuadrilátero convexo el segmento que une los puntos medios de los lados opuestos es igual a la semisuma de los otros dos lados, semejante cuadrilátero es un trapecio.

106. Las bases de los triángulos regulares con lados a y $3a$, yacen en una misma línea. Los triángulos están situados por diferentes lados de una recta y la distancia entre los extremos más próximos de sus bases es igual a $2a$. Hallen la distancia entre los vértices de los triángulos que no yacen en la indicada recta.

107. En el cuadrilátero $ABCD$ se conoce que $\angle A = \angle D = 60°$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3$, $CD = 2\sqrt{3}$. Hallen los ángulos B y C.

108. Las diagonales del cuadrilátero convexo $ABCD$ se cortan en el punto O bajo ángulo recto de forma que $AO = 8$ cm, $BO = CO = 1$ cm, $DO = 7$ cm. Al continuar los lados AB y CD ellos se cortan en el punto M. Hallen el ángulo AMD.

109. En el cuadrilátero $ABCD$ el ángulo B es recto y $AB : BD = 2 : 4\sqrt{2}$. Al continuar los lados BC y AD ellos concurren en el punto M. Hallen el ángulo DMC si sabemos que $\angle ABD = 45°$.

110. En el rectángulo $ABCD$ está inscrito el triángulo AEK de forma que el punto E yace en el lado BC y el punto K, en CD. Hallen el ángulo $\operatorname{tg} \angle EAK$ si $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BE}{CE} = \dfrac{CK}{DK} = m$.

§ 3. CIRCUNFERENCIA

EJEMPLO 1. Demostremos que si a y b son los catetos, c, la hipotenusa de un triángulo rectángulo y r, el radio de la circunferencia inscrita, $r = \frac{a+b-c}{2}$.

SOLUCIÓN. Realicemos las construcciones auxiliares necesarias: desde el centro O de la circunferencia inscrita tracemos los radios OD, OE y OF a los puntos de tangencia. Entonces, $OD \perp BC$, $OE \perp AC$, $OF \perp AB$ (fig. 44). $ODCE$ es un cuadrado (todos los ángulos,

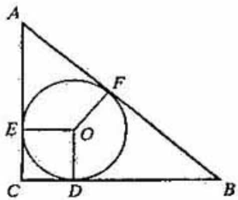


Fig. 44

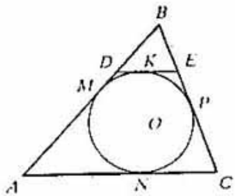


Fig. 45

rectos y $OE = OD$), es decir, $CE = CD = r$, $BD = a - r$, $AE = b - r$. Pero $BD = BF$ y $AE = AF$ (teorema 12b), por lo tanto, $BF = a - r$, $AF = b - r$. $AB = BF + AF$, es decir, $c = (a - r) + (b - r)$, de donde hallamos que $r = \frac{a+b-c}{2}$.

OBSERVACIÓN. La fórmula obtenida se utiliza con frecuencia al resolver problemas ligados con triángulos rectángulos.

EJEMPLO 2. A la circunferencia inscrita en un triángulo, cuyo perímetro es igual a 18 cm, se ha trazado una tangente paralela a la base del triángulo. La largura del segmento de la tangente situado entre los lados laterales del triángulo es igual a 2 cm. Hallemos la base del triángulo.

SOLUCIÓN. Sean M, P y N los puntos de tangencia (fig. 45). Entonces, $AM = AN$, $CN = CP$, $BP = BM$ (teorema 12b). Hagamos $AN = AM = x$, $CN = CP = y$, $BP = BM = z$. En tal caso, el perímetro del triángulo ABC será igual a $2x + 2y + 2z$ y, por consiguiente, $x + y + z = 9$.

Tracemos la tangente $DE \parallel AC$. Entonces, los triángulos ABC y DBE son semejantes y, por lo tanto, la razón de sus lados es igual a la de los perímetros: $\frac{DE}{AC} = \frac{P_{DBE}}{P_{ABC}}$, es decir,

$$\frac{2}{x+y} = \frac{P_{DBE}}{18}. \tag{1}$$

$P_{DBE} = BD + BE + DE = BD + BE + (DK + KE) = BD + BE + (DM + EP)$. (Aquí, hacemos uso de que $DM = DK$ y $KE = EP$). Por consiguiente, $P_{DBE} = (BD + DM) + (BE + EP) = BM + BP = 2z$ y, entonces, la igualdad (1) puede reescribirse en la forma $\frac{2}{x+y} = \frac{2z}{18}$. Obtenemos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y+z=9, \\ \frac{2}{x+y} = \frac{z}{9}. \end{cases}$ Haciendo $x+y=b$, obtenemos $\begin{cases} b+z=9, \\ bz=18, \end{cases}$ de donde hallamos que bien $b=3$ cm, o bien $b=6$ cm.

EJEMPLO 3. Por el punto A de la cuerda común AB de dos circunferencias se ha trazado una recta que cruza la primera circunferencia en el punto C y la segunda, en el D. La tangente a la primera circunferencia en el punto C y la tangente a segunda circunferencia en el punto D, concurren en el punto M. Demostremos que los puntos M, C, B y D yacen en una circunferencia (fig. 46).

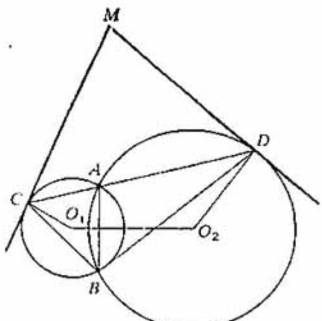


Fig. 46

SOLUCIÓN. Es suficiente demostrar que $\angle CMD + \angle CBD = 180°$ (teorema 15a). $\angle CBA = \frac{1}{2} \cup AC$ (como ángulo inscrito). Pero, asimimo, $\angle MCA = \frac{1}{2} \cup AC$ (como el ángulo entre la tangente y la cuerda, teorema 13).

Por lo tanto, $\angle CBA = \angle MCA$. Por analogía se demuestra que $\angle ABD = \angle ADM$.

Del $\triangle MCD$ llegamos a la conclusión de que $\angle CMD + \angle MCD + \angle MDC = 180°$. Pero $\angle MCD + \angle MDC = \angle CBA + \angle ABD = \angle CBD$.

Por consiguiente, $\angle CMD + \angle CBD = 180°$ que es lo que habíamos de demostrar.

EJEMPLO 4. En una circunferencia está inscrito el triángulo isósceles ABC con base $AC = b$ y ángulo α en la base. La segunda circunferencia es tangente a la primera y a la base del triángulo en su punto medio D y se encuentra fuera del triángulo. Hallemos el radio de la segunda circunferencia (fig. 47).

SOLUCIÓN. Hagamos uso de que $AD \cdot DC = BD \cdot DK$ (teorema 16a). Como $AD = DC = \frac{b}{2}$, $BD = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \alpha$, $DK = 2r$, obtenemos: $\frac{b^2}{4} = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \alpha \cdot 2r$, de donde $r = \frac{b}{4} \operatorname{ctg} \alpha$.

EJEMPLO 5. Una circunferencia de radio R pasa por los dos vértices adyacentes de un cuadrado. La tangente a la circunferencia, trazada desde el tercer vértice del cuadrado es dos veces mayor que el lado del cuadrado. Hallemos el lado del cuadrado.

SOLUCIÓN. Introduzcamos las designaciones: $AB = x$, $BM = 2x$ (fig. 48). Continuemos el segmento AB hasta su intersección con la circunferencia en el punto K. Entonces $BK \cdot AB = BM^2$ (teorema

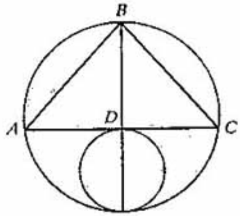


Fig. 47

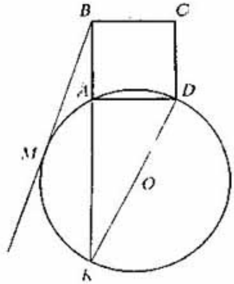


Fig. 48

16c), es decir, $BK \cdot x = 4x^2$, de donde hallamos: $BK = 4x$, es decir, $AK = 3x$. $\angle KAD = 90°$, por lo tanto, KD es el diámetro. Del triángulo rectángulo ADK, hallamos: $AD^2 + AK^2 = KD^2$, o sea, $x^2 + 9x^2 = 4R^2$, de donde $x = \frac{R\sqrt{10}}{5}$.

EJEMPLO 6. El ángulo entre los radios del sector circular es igual a 90°. Una circunferencia de ese mismo radio tiene su centro en el extremo del arco del sector y ella divide el sector en dos triángulos curvilíneos. En el menor de éstos está inscrita una circunferencia. Hallemos la razón de los radios de la circunferencia inscrita y el sector.

SOLUCIÓN. Realicemos las construcciones auxiliares necesarias, las que, por regla, se hacen cuando se trata de la tangencia interna o externa de circunferencias o la tangencia de una circunferencia con una recta: O_2O_3 es la línea de los centros; B, el punto de tangencia; O_1O_3, la línea de los centros; A, el punto de tangencia; $O_3C \perp O_1C$; C, el punto de tangencia (fig. 49). Introduzcamos la designación: $O_1O_2 = R$ (parámetro auxiliar) y expresemos con R el radio r de la circunferencia inscrita.

Consideremos el $\triangle O_1O_2O_3$. Tenemos: $O_1O_2 = R$, $O_1O_3 = R - r$, $O_2O_3 = R + r$. Tracemos la altura O_3H. Entonces, $O_1H = O_3C = r$, $O_2H = R - r$. Utilicemos O_3H como elemento de referencia.

Del $\triangle O_1O_3H$, tenemos: $O_3H^2 = O_1O_3^2 - O_1H^2 = (R-r)^2 - r^2$. Del $\triangle O_3HO_2$, tenemos: $O_3H^2 = O_2O_3^2 - O_2H^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2$.

Así, pues, $(R-r)^2 - r^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2$, de donde hallamos $r = \frac{R}{6}$. O sea, $\frac{r}{R} = \frac{1}{6}$.

EJEMPLO 7. Dos circunferencias con radios r y R son tangentes exteriores. AB y CD son sus tangentes externas comunes. Demostremos que en el cuadrilátero $ABCD$ se puede inscribir una circunferencia y, además, hallemos su radio.

SOLUCION. Realicemos las construcciones auxiliares necesarias. Continuemos las tangentes hasta su concurrencia en el punto O, tracemos la línea de los centros OO_1O_2, tracemos los radios O_1D y O_2C en los puntos de tangencia $O_1D \perp CD$ y $O_2C \perp CD$ (fig. 50).

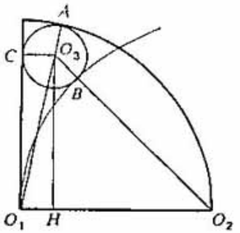


Fig. 49

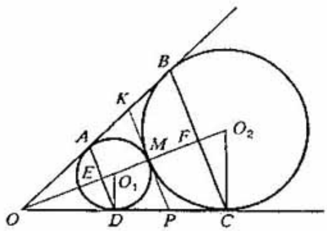


Fig. 50

Como la línea de los centros es el eje de simetría de la figura, los puntos A y D son simétricos con relación a OO_2 y los puntos B y C son simétricos respecto a OO_2. Esto significa que $ABCD$ es un trapecio isósceles.

Para que sea posible inscribir una circunferencia en el trapecio, es necesario y suficiente que se verifique la igualdad $AD + BC = AB + CD$ (teorema 16b) o bien, ya que $AB = CD$, la igualdad $AB = \frac{AD+BC}{2}$. Es suficiente demostrar que el segmento AB es igual a la base media del trapecio.

Tracemos la tangente interna común KP. Entonces, $AK = KM$, $BK = KM$, $DP = PM$, $CP = PM$ (teorema 12b), lo que significa que KP es la base media del trapecio $ABCD$ y $KP = AB$. Así, pues, en el trapecio podemos inscribir una circunferencia y EF es su diámetro. Hagamos $O_1E = x$, $O_2F = y$. Entonces, de la igualdad $MF = ME$ (la base media KP divide el segmento EF por la mitad) llegamos a la conclusión de que $R - y = r + x$. De la semejanza de los triángulos O_1DE y O_2CF, obtenemos: $\frac{O_1E}{O_2F}=\frac{O_1D}{O_2C}$, o sea, $\frac{x}{y}=\frac{r}{R}$.

Del sistema de ecuaciones $\begin{cases} R-y=r+x, \\ \frac{x}{y}=\frac{r}{R} \end{cases}$ hallamos: $y=\frac{R^2-rR}{R-r}$ y, entonces, el radio de la circunferencia inscrita es igual a $R-y=\frac{2Rr}{R+r}$.

EJEMPLO 8. El ángulo agudo de un triángulo rectángulo es igual a α. Hallemos su hipotenusa si el radio de la circunferencia, tangente a la hipotenusa y a las continuaciones de los catetos, es igual a R.

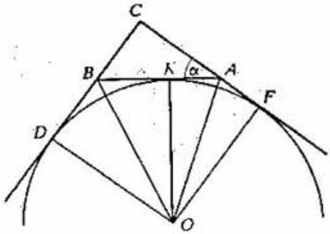


Fig. 51

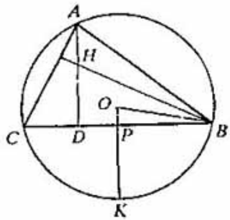


Fig. 52

SOLUCIÓN. Como $AB=AK+BK$ (fig. 51), el problema se reduce al cálculo de los segmentos AK (del $\triangle AOK$) y BK (del $\triangle OBK$). Consideremos el $\triangle AOK$. Como $\angle KOF=\angle BAC=\alpha$ (ángulos con lados perpendiculares entre sí), $\angle KOA=\frac{\alpha}{2}$ ($\triangle KOA=\triangle AOF$). De modo que $AK=OK\cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Examinemos el $\triangle BOK$. $\angle BOK=\frac{1}{2}\angle DOK=\frac{1}{2}(90^\circ-\angle KOF)=45^\circ-\frac{\alpha}{2}$. (Aquí hemos hecho uso de que en el cuadrilátero $ODCF$, tres ángulos D, C y F son rectos y, por lo tanto, asimismo, el cuarto ángulo, es decir $\angle DOF$, es recto.) Entonces, $BK=OK\cdot\operatorname{tg}\angle BOK=R\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$, $AB=AK+BK=R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+R\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=R\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}+45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{R\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

$\left(\text{Aquí, se ha hecho uso de la fórmula } \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.\right)$

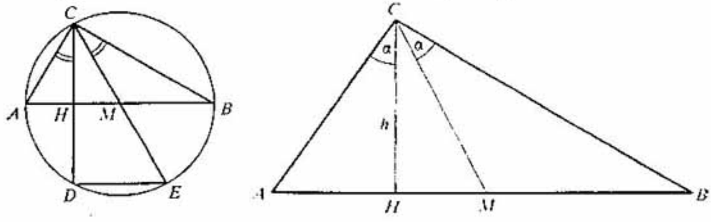
EJEMPLO 9. Se ha dado un triángulo acutángulo ABC con ángulos $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. ¿En qué razón divide el ortocentro la altura trazada desde el vértice A?

SOLUCIÓN. En torno del triángulo ABC circunscribamos una circunferencia. Designemos con R el radio de ésta (parámetro auxiliar).

Tracemos $OP \perp BC$ y hagamos uso de que $AH = 2OP$ (véase el ejemplo 8 del § 2), donde H es el ortocentro.

Consideremos el $\triangle OPB$ (fig. 52). Como $\angle KOB$ se mide con el arco BK, $\cup BK = \frac{1}{2} \cup BC$ y $\angle CAB$ se mide con la mitad del arco BC, $\angle KOB = \angle CAB = \alpha$. Entonces, $OP = R \cos \alpha$ y, por lo tanto, $AH = 2R \cos \alpha$.

De acuerdo con el teorema de los senos $\frac{AC}{\operatorname{sen} \angle ABC} = 2R$ (teorema 8), es decir, $AC = 2R \operatorname{sen} \beta$ y, en tal caso, del $\triangle ACD$ obtenemos que $AD = AC \operatorname{sen} \angle ABC = 2R \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma$.



(a) (b)

Fig. 53

Entonces, $AH = 2R \cos \alpha$, $HD = AD - AH = 2R \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma - 2R \cos \alpha = 2R (\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma - \cos (180^\circ - (\beta + \gamma))) = 2R (\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma + \cos (\beta + \gamma)) = 2R (\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma + \cos \beta \cos \gamma - \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma) = 2R \cos \beta \cos \gamma$.

Así, pues, $\frac{AH}{HD} = \frac{2R \cos \alpha}{2R \cos \beta \cos \gamma} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \cos \gamma}$.

EJEMPLO 10. Demostremos que si la altura y la mediana, trazadas desde uno de los vértices de un triángulo escaleno, yacen dentro del triángulo y forman con sus lados laterales ángulos iguales, dicho triángulo es rectángulo.

SOLUCIÓN. Resolvamos este problema con dos procedimientos.

I procedimiento (geométrico) (fig. 53, *a*). Circunscribamos al triángulo dado ABC la circunferencia ω y tracemos la altura CH y la mediana CM hasta la intersección con la circunferencia en los puntos D y E, respectivamente.

Como $\angle ACD = \angle BCE$, $\smile AmD = \smile BnE$ y, por lo tanto, las cuerdas AB y DE, entre las que yacen los arcos iguales AmD y BnE, son paralelas. Pero $\angle CHB = 90°$. Esto quiere decir que también $\angle CDE = 90°$. Entonces, CE es el diámetro de la circunferencia. Éste divide por la mitad la cuerda AB, lo que sólo es posible cuando la cuerda AB es el diámetro de la circunferencia ω. Pero, en tal caso $\angle ACB = 90°$, es decir, el $\triangle ABC$ es rectángulo.

II procedimiento (algebraico) (fig. 53, *b*). Demostremos que $\angle ACB = 90°$. Es evidente, que la suposición de que $\angle CAB = 90°$ es inverosímil, ya que entonces el segmento CH coincide con el lado AC y, por lo tanto, debe coincidir con el lado BC, para que se formen los ángulos iguales prefijados. No obstante, la mediana no puede coincidir con el lado del triángulo.

Sea $\angle ACB = x$. Esta es la incógnita que buscamos. Para abreviar, hagamos asimismo $\angle ACH = \alpha$. Entonces también $\angle BCM = \alpha$. A continuación, introduzcamos el parámetro auxiliar: $CH = h$. Entonces, $\angle BCH = x - \alpha$, $\angle MCH = x - 2\alpha$.

Como CM es la mediana, $AM = BM$. Pero $AM = AH + MH$ y $BM = BH - MH$. Así, pues, $AH + MH = BH - MH$, o bien $2MH = BH - AH$. De los triángulos rectángulos MCH, BCH y ACH tenemos $MH = h \operatorname{tg}(x - 2\alpha)$, $BH = h \operatorname{tg}(x - \alpha)$ y $AH = h \operatorname{tg} \alpha$, respectivamente. Obtenemos la ecuación:

$$2h \operatorname{tg}(x - 2\alpha) = h \operatorname{tg}(x - \alpha) - h \operatorname{tg} \alpha \quad \text{o bien}$$

$$2 \operatorname{tg}(x - 2\alpha) = \operatorname{tg}(x - \alpha) - \operatorname{tg} \alpha.$$

Después de resolver esta ecuación, hallamos:

$$\frac{2 \operatorname{sen}(x-2\alpha)}{\cos(x-2\alpha)} = \frac{\operatorname{sen}(x-2\alpha)}{\cos(x-\alpha)\cos\alpha}.$$

Como el triángulo ABC es isósceles, $x \neq 2\alpha$, es decir, $\operatorname{sen}(x-2\alpha) \neq 0$ y, entonces,

$$2\cos(x - \alpha)\cos\alpha = \cos(x - 2\alpha) \quad \text{o bien}$$

$$\cos x + \cos(x - 2\alpha) = \cos(x - 2\alpha),$$

$$\text{de donde } \cos x = 0,$$

es decir, $x = 90°$ y el triángulo ABC es rectángulo.

EJEMPLO 11. AD y CM son las alturas del triángulo ocutángulo ABC, cuyo perímetro es igual a 15 cm, el perímetro del triángulo BDM es igual a 9 cm, el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo BDM es igual a 1,8 cm. Hallemos la largura de AC (fig. 54).

SOLUCION. Ante todo, demostremos que los triángulos ABC y BMD son semejantes. En efecto, dos triángulos rectángulos ABD y BMC con el ángulo agudo común B son semejantes y, por esto, $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BM}$.

Pero, en tal caso, los triángulos ABC y MBD, con el ángulo B común y los lados que los contienen, son proporcionales, es decir, semejantes.

Hagamos uso de que en los triángulos semejantes las razones entre los perímetros y entre los radios de las circunferencias circunscritas son iguales a la razón de semejanza. De acuerdo con el planteamiento, $P_{ABC} = 15$ cm, $P_{BDM} = 9$ cm, por lo que la razón de semejanza es igual a $\frac{5}{3}$. Ya que, según el planteamiento, el radio de la circunferencia circunscrita en torno del triángulo BMD es igual a 1,8 cm, obtenemos que el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$, es igual a $1{,}8 \cdot \frac{5}{3} = 3$ cm.

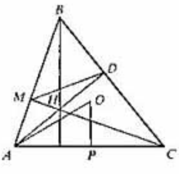


Fig. 54

Sea el punto O el centro de la circunferencia circunscrita en torno del $\triangle ABC$, $OP \perp AC$. Entonces, $BH = 2OP$ (véase el ejemplo 8 del § 2). Pero BH es el diámetro de la circunferencia circunscrita en torno del triángulo BMD (ya que el ángulo BDH que en él se apoya es igual a 90°), por lo que $BH = 3{,}6$ cm y, por ello, $OP = 1{,}8$ cm.

Ahora, en el triángulo rectángulo AOP conocemos dos lados: $AO = 3$ cm (el radio de la circunferencia circunscrita) y $OP = 1{,}8$ cm. Entonces, $AP = \sqrt{9 - \left(\frac{9}{5}\right)^2} = \frac{12}{5}$ cm y, por lo tanto, $AC = 4{,}8$ cm.

PROBLEMAS PARA EL TRABAJO INDIVIDUAL

I. Circunferencia

111. En el punto A dos circunferencias son tangentes exteriores, BC es su tangente común externa. Demuestren que $\angle BAC = 90°$.

112. Dos circunferencias se intersecan en los puntos A y B. Éstos yacen por diferentes lados de la recta l que corta las circunferencias en los puntos C, D, E y M, respectivamente. Demuestren que la suma de los ángulos DBE y CAM es igual a 180°.

113. Dos circunferencias se intersecan en los puntos A y B. Las rectas l_1 y l_2 son paralelas, con la particularidad de que l_1 pasa por el punto A y corta las circunferencias en los puntos E y K, mientras que l_2 pasa por el punto B y corta las circunferencias en los puntos M y P. Demuestren que el cuadrilátero $EKMP$ es un paralelogramo.

114. Hacia una circunferencia con centro en el punto O, desde el punto M, se han trazado las tangentes MA y MB. La recta l es tangente a la circunferencia en el punto C e interseca las tangentes MA y MB en los puntos D y E, correspondientemente. Demuestren: a) que el perímetro del triángulo MDE no depende de cómo se ha elegido el punto C; b) que el ángulo DOE no depende de la elección del punto C.

115. Los puntos A, B, C y D dividen una circunferencia en partes entre las que la razón es $1 : 3 : 5 : 6$. Hallen los ángulos entre las tangentes a la circunferencia trazadas desde los puntos A, B, C y D.

116. Dos circunferencias iguales son tangentes exteriores y con una tercera circunferencia cuyo radio es igual a 8 cm. El segmento que une los puntos de tangencia de las dos circunferencias iguales con la tercera es igual a 12 cm. Hallen los radios de las circunferencias iguales.

117. La cuerda común de dos circunferencias que se intersecan es igual a a y, para una de ellas, es el lado del hexágono regular inscrito y, para la otra, del cuadrado inscrito. Hallen la distancia entre los centros de las circunferencias.

118. Dos circunferencias con radios r y R son tangentes exteriores. Hallen la largura de su tangente externa común.

119. Dos circunferencias con radios r y R son tangentes exteriores. La recta l corta la circunferencia en los puntos A, B, C y D de modo que $AB = BC = CD$. Hallen AD.

120. Dos circunferencias, la razón entre cuyos radios es $1 : 3$, son tangentes exteriores, la largura de la tangente externa común es $6\sqrt{3}$ cm. Hallen el perímetro de la figura formada por las tangentes externas y los arcos externos de las circunferencias.

121. Desde un punto externo se han trazado a la circunferencia una secante de 48 cm de largura y una tangente, cuya largura constituye $\frac{2}{3}$ del segmento interno de la secante. Hallen el radio de la circunferencia si sabemos que la secante se encuentra a una distancia de 24 cm del centro.

122. La tangente externa común de dos circunferencias que son tangentes exteriores forma con la línea de los centros el ángulo α. Hallen la razón de los radios.

123. Del punto A, situado fuera de un círculo con centro en O, se han trazado las secantes ABC y AMK (B y M son los puntos de la circunferencia más cercanos a A que yacen en las secantes). Hallen BC si sabemos que $AC = a$, $\angle CAO = \alpha$, $\angle CO\widetilde{K} = \beta$ y que la secante AMK pasa por el centro de la circunferencia.

124. Dos circunferencias se intersecan en los puntos A y B. Por el punto A se han trazado los segmentos AC y AD, cada uno de los cuales, siendo cuerda de una circunferencia, es tangente a la segunda circunferencia. Demuestren que $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot DC$.

125. AB y CD son cuerdas intersecantes, perpendiculares entre sí de las circunferencias de radio R. Demuestren que $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

126. Demuestren que la suma de los cuadrados de las distancias desde el punto M, tomado en el diámetro de una circunferencia, hasta los extremos de cualesquiera de las cuerdas paralelas al diámetro es una magnitud constante para la circunferencia dada.

127. Dos circunferencias son tangentes exteriores en el punto C, AB es su tangente externa común. Hallen los radios si $AC = 8$ cm, $BC = 6$ cm.

128. Las circunferencias de radios R y $\frac{R}{2}$ son tangentes exteriores. Desde el centro de la circunferencia menor se ha trazado, bajo un ángulo de 30° con relación a la línea de los centros, un segmento de largura $2R$. Hallen las larguras de las partes del segmento que yacen fuera de la circunferencia.

129. Las circunferencias de radios a y b son tangentes interiores ($a < b$), con la particularidad de que el centro de la circunferencia mayor yace fuera de la menor. La cuerda AB de la circunferencia mayor es tangente a la menor y forma con la tangente común a las circunferencias el ángulo α. Hallen AB.

11. Triángulos inscritos y circunscritos

130. En el triángulo regular ABC, en los lados AB y AC, se han tomado los puntos M y K de manera que $AM : MB = 2 : 1$, $AK : KC = 1 : 2$. Demuestren que el segmento KM es igual al radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

131. Al triángulo ABC ($AB = BC$) está circunscrita una circunferencia. Las continuaciones de las bisectrices de los ángulos A y C intersecan la circunferencia en los puntos K y P y entre sí en el punto E. Demuestren que el cuadrilátero $BKEP$ es un rombo.

132. AD y CE son las bisectrices del triángulo ABC. La circunferencia circunscrita al triángulo BDE pasa por el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC. Demostrar que $\angle ABC = 60°$.

133. Demuestren que el centro de la circunferencia inscrita en un triángulo yace dentro de un triángulo formado por las bases medias del triángulo dado.

134. La recta l es tangente en el punto C a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Demuestren que el cuadrado de la altura CH del triángulo ABC es igual al producto de las distancias desde la recta l a los puntos A y B.

135. Hallen los ángulos del triángulo si sabemos que los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita a él son simétricos con relación a uno de los lados del triángulo.

136. La base de un triángulo isósceles es $2a$ y la altura, h. A la circunferencia inscrita en el triángulo se ha trazado una tangente paralela a la base. Hallen la largura del segmento de esta tangente que yace entre los lados laterales del triángulo.

137. En un triángulo rectángulo el punto de tangencia de la circunferencia inscrita divide la hipotenusa en segmentos de 24 y 36 cm. Hallen los catetos.

138. En un triángulo rectángulo uno de los catetos es igual a 48 cm y la proyección del otro en la hipotenusa, a 3,92 cm. Hallen la longitud de la circunferencia inscrita.

139. En un triángulo rectángulo con catetos de 18 y 24 cm hallen la distancia entre los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita.

140. En un triángulo isósceles la altura, trazada a la base, es 1,5 veces menor que el radio de la circunferencia circunscrita. Hallen el ángulo en la base.

141. Hallen el radio de una circunferencia circunscrita al triángulo con lados a y b y el ángulo γ entre ellos.

142. En un triángulo isósceles la base es igual a b, el ángulo en ella α. A la circunferencia inscrita en el triángulo se ha trazado una tangente paralela a la base. Hallen la largura de ésta situada entre los lados laterales del triángulo.

143. En un triángulo isósceles la razón de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita es igual a k. Hallen los ángulos del triángulo.

144. Demuestren que para todo triángulo rectángulo es válida la desigualdad $0,4 < \frac{r}{h} < 0,5$, donde r es el radio de la circunferencia inscrita; h, la altura bajada a la hipotenusa.

145. Demuestren que la circunferencia circunscrita a un triángulo es igual a la circunferencia que pasa por dos de sus vértices y el ortocentro.

146. En una circunferencia está inscrito el triángulo regular ABC. En el arco BC se ha tomado al azar el punto M y trazado las cuerdas AM, BM, CM. Demuestren que $AM = BM + CM$.

147. Demuestren que la suma de los cuadrados de las distancias desde un punto arbitrario de la circunferencia hasta los vértices de un triángulo regular inscrito en ella, es una magnitud constante que no depende de la posición del punto en la circunferencia.

148. En una circunferencia está inscrito el triángulo isósceles ABC ($AB = BC$). En el arco AB se toma al azar el punto K y se une con cuerdas con los vértices del triángulo. Demuestren que $AK \cdot KC = AB^2 - KB^2$.

149. En un triángulo ocutángulo con lados a, b y c, desde el centro de la circunferencia circunscrita, se bajan perpendiculares a los lados. Las longitudes de estas perpendiculares son iguales a m, n y p, respectivamente. Demuestren que $\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=\frac{mnp}{abc}$.

150. Demuestren que las bases de las perpendiculares, bajadas a los lados de un triángulo o bien a la continuación de ellos, desde un punto arbitrario de la circunferencia circunscrita al triángulo yacen en una misma recta.

151. Demuestren que si a y b son los lados de un triángulo, l, la bisectriz del ángulo entre ellos, a' y b', los segmentos en los que la bisectriz divide el tercer lado, $l^2 = ab - a'b'$.

152. Demuestren que el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo, trazado a uno de los vértices de éste, es perpendicular a la recta que une la base de las alturas trazadas de los otros dos vértices del triángulo.

153. Al triángulo ABC se ha circunscrito una circunferencia. Por el punto B se ha trazado una tangente a la circunferencia hasta la intersección con la continuación del lado CA tras el punto A en el punto D. Hallen el perímetro del triángulo ABC si $AB + AD = AC$, $CD = 3$ cm, $\angle BAC = 60°$.

154. En una circunferencia de radio R está inscrito el triángulo regular ABC. La cuerda BD interseca AC en el punto E de forma que $AE : CE = 2 : 3$. Hallen CD.

155. En el trapecio $ABCD$ la bisectriz del ángulo A interseca la base BC (o bien su continuación) en el punto E. En el triángulo ABE está inscrita una circunferencia tangente al lado AB en el punto M y el lado BE en el punto P. Hallen el ángulo BAD si sabemos que $AB : MP = 2$.

156. La hipotenusa de un triángulo rectángulo, se divide con el punto de tangencia de la circunferencia inscrita en segmentos, cuya razón es igual a k ($k > 1$). Hallen los ángulos del triángulo.

157. Hallen el ángulo en la base de un triángulo isósceles si sabemos que su ortocentro yace en la circunferencia inscrita.

III. Disposición arbitraria de la circunferencia y el triángulo

158. Los segmentos AD, BM y CP son las medianas del triángulo ABC. La circunferencia circunscrita al triángulo DMC pasa por el centroide del triángulo ABC. Demuestren que $\angle ABM = \angle PCB$ y $\angle BAD = \angle PCA$.

159. En un triángulo rectángulo está inscrita una semicircunferencia de forma que su diámetro yace en la hipotenusa, mientras que el centro divide a ésta en segmentos de 15 y 20 cm. Hallen el radio de la semicircunferencia.

160. Una circunferencia pasa por el vértice A del triángulo rectángulo ABC, es tangente al lado BC y tiene su centro en la hipotenusa AB. Hallen su radio si $AB = c$, $BC = a$.

161. En el cateto BC del triángulo rectángulo ABC, como en su diámetro, se ha construido una circunferencia que interseca en el punto D la hipotenusa AB de forma que $AD : DB = 3 : 1$. Hallen los lados del triángulo ABC si la altura trazada a la hipotenusa es igual a 3 cm.

162. Los lados de un triángulo son iguales a a y b, el ángulo entre ellos, a 120°. Hallen el radio de la circunferencia que pasa por dos vértices del tercer lado y el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo dado.

163. Una circunferencia pasa por los vértices A y B del triángulo ABC y es tangente al lado BC en el punto B. El lado AC se divide con la circunferencia en las partes AM y MC de forma que $AM = MC + BC$. Hallen BC si $AC = 4$ cm.

164. En el lado AB del triángulo ABC, como en su diámetro, se ha construido una circunferencia que interseca el lado BC en el punto D. Hallen AC si sabemos que $CD = 2$ cm y $AB = BC = 6$ cm.

165. En el lado AB del triángulo ABC, como en su diámetro, se ha construido una circunferencia que interseca AC en el punto D y BC en el punto E. Hallen AC y BC si sabemos que $AB = 3$ cm, $AD : DC = 1 : 1$ y $BE : EC = 7 : 2$.

166. El segmento BD es la altura del triángulo ABC, y DE, la mediana del triángulo BCD. En el triángulo BDE está inscrita una circunferencia tangente al lado BE en punto K y al lado DE en el punto M. Hallen los ángulos del triángulo ABC si $AB = BC = 8$ cm, $KM = 2$ cm.

167. En el triángulo ABC se han trazado la altura AD y una circunferencia con el centro en el punto A y de radio AD. Hallen la largura del arco de dicha circunferencia situado en el interior del triángulo si $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.

168. Demuestren que el radio de la circunferencia, tangente a la hipotenusa y a la continuación de los catetos de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las longitudes de la hipotenusa y del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo.

169. Las bisectrices AD y CK del triángulo ABC se cortan en el punto O, $KD = 1$ cm. Hallen los ángulos y los dos otros lados del triángulo KDO si es conocido que el punto B yace en la circunferencia circunscrita al triángulo KDO.

170. Una circunferencia es tangente a los lados AC y BC del triángulo ABC y tiene su centro en AB. Hallen el radio de la circunferencia si $AC = 48$ cm, $BC = 140$ cm, $AB = 148$ cm.

171. En el triángulo ABC el punto medio de AC es D, el de BC, E, la circunferencia circunscrita al triángulo CDE pasa por el centroide del triángulo ABC. Hallen la largura de la mediana CK si $AB = c$.

172. Hallen la dependencia entre los lados a, b y c del triángulo ABC si se conoce que el vértice C, el centroide M y los puntos medios de los lados AC y BC yacen en una misma recta.

173. En el triángulo isósceles ABC con ángulo B igual a 120°, está inscrita una semicircunferencia de radio $(3\sqrt{3} + \sqrt{21})$ cm con centro en AC. A la semicircunferencia se traza una tangente que interseca los lados laterales AB y BC en los puntos D y E, respectivamente. Hallen BD y BE si $DE = 2\sqrt{7}$ cm.

174. En el triángulo ABC son conocidos los lados: $AB = BC = 39$ cm, $AC = 30$ cm. Se han trazado las alturas AD y BE. Hallen el radio de la circunferencia que pasa por los puntos D y E y tangente al lado BC.

175. En el triángulo ABC se han trazado las alturas CD y AE. Al triángulo BDE se circunscribe una circunferencia. Hallen la longitud del arco de ésta que yace dentro del triángulo ABC si $AC = b$, $\angle ABC = \beta$.

IV. Circunferencia y cuadrilátero

176. Demuestren que si para un trapecio existen las circunferencias inscrita y circunscrita, la altura del trapecio es la media proporcional entre sus bases.

177. Las bases de un trapecio isósceles son iguales a 21 y 9 cm, la altura, a 8 cm. Hallen el radio de la circunferencia circunscrita a dicho trapecio.

178. Las bases de un trapecio isósceles son a y b, el ángulo agudo, α. Hallen el radio de la circunferencia circunscrita a dicho trapecio.

179. Dos vértices de un cuadrado yacen en la circunferencia de radio R y las otras dos, en la tangente a dicha circunferencia. Hallen el lado del cuadrado.

180. El ángulo agudo A del rombo $ABCD$ es igual a α. Hallen la razón entre el radio de la circunferencia inscrita en el rombo y el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

181. Un trapecio está circunscrito a una circunferencia. Hallen los ángulos del trapecio si conocemos que la razón entre su lado lateral y su base menor es igual a k.

182. Un trapecio con ángulos agudos α y β está circunscrito a una circunferencia. Hallen la razón entre el perímetro del trapecio y la longitud de la circunferencia.

183. a) Demuestren el teorema de Ptolomeo: si los lados opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia son iguales a, b, c y m y las diagonales, d_1 y d_2, $ab + cm = d_1d_2$; b) empleando el teorema de Ptolomeo demostrar la afirmación del problema 146.

184. Demuestren que la suma de los productos de las alturas de un triángulo ocutángulo por sus segmentos desde el ortocentro hasta los vértices es igual a la semisuma de los cuadrados de los lados.

185. En la hipotenusa de un triángulo rectángulo, como sobre un lado, se ha construido un cuadrado (fuera del triángulo). El centro del cuadrado está unido con el vértice del ángulo recto del triángulo. ¿En qué segmentos se divide la hipotenusa si los catetos son iguales a 21 y 28 cm?

186. Una circunferencia es tangente a dos lados adyacentes de un cuadrado y divide cada uno de los otros dos en segmentos de 2 y 23 cm. Hallen el radio de la circunferencia.

187. En el rombo $ABCD$ con lado de 4 cm y ángulo BAD igual a 60°, está inscrita una circunferencia. A ella se ha trazado una tangente que corta AB en el punto P y AD en el punto Q. Hallen PB y QD si $PQ = 2$ cm.

188. La razón entre el radio de la circunferencia, circunscrita a un trapecio, y el radio de la circunferencia inscrita es igual a k. Hallen el ángulo agudo del trapecio.

189. En una circunferencia está inscrito el cuadrilátero $ABCD$, cuyas diagonales son perpendiculares entre sí y concurren en el punto E. La recta que pasa por E y es perpendicular a AB, interseca CD en el punto M. Hallen EM si $AD = 8$ cm, $AB = 4$ cm y $\angle CDB = \alpha$.

190. En una circunferencia está inscrito el cuadrilátero $ABCD$, cuyas diagonales son perpendiculares entre sí y se cortan en el punto E. La recta que pasa por E y el punto medio del lado CD interseca AB en el punto H. Hallen HB si $ED = 6$ cm, $BE = 5$ cm y $\angle ADB = \alpha$.

191. En el cuadrilátero convexo $ABCD$ el lado AB es igual a $\frac{25}{64}$; BC, a $12\frac{25}{64}$; CD, a $6\frac{1}{4}$. Sabemos que el ángulo DAB es agudo, ADC, obtuso, con la particularidad de que $\operatorname{sen} \angle DAB = \frac{3}{5}$, $\cos \angle ABC = -\frac{63}{65}$. La circunferencia con centro en el punto O es tangente a los lados BC, CD y AD. Hallen la largura del segmento OC.

V. Diferentes problemas

192. Desde el punto C se han trazado a una circunferencia dos tangentes CA y CB que entre sí forman un ángulo de 60°. En el triángulo curvilíneo, formado con estas tangentes y el arco menor AB, está inscrita una circunferencia. Demuestren que la longitud de ese arco es igual a la de la circunferencia inscrita.

193. Un rectángulo con lados de 36 y 48 cm se divide por la diagonal en dos triángulos. En cada uno de ellos está inscrita una circunferencia. Hallen las distancias entre sus centros.

194. Dos circunferencias de radios 16 y 9 cm son tangentes exteriores. Calculen el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo curvilíneo situado entre las circunferencias y su tangente externa común.

195. La cuerda de 6 cm de largura divide una circunferencia en dos segmentos. En el menor de ellos está inscrito un cuadrado cuyo lado es igual a 2 cm. Hallen el radio de la circunferencia.

196. Dos círculos de radio R están situados de tal forma que la distancia entre sus centros es igual a R. En la intersección de los círculos está inscrito un cuadrado. Hallen el lado del cuadrado.

197. En el sector circular, cuyo ángulo es igual a 2α, está inscrita una circunferencia. Hallen la razón entre los radios de la circunferencia inscrita y el sector.

198. En el sector AOB de un círculo de radio R con ángulo central α está inscrito un triángulo regular. Uno de los vértices de éste yace en el punto medio del arco AB y los otros dos, en los radios OA y OB. Hallen el lado del triángulo.

199. El arco de una circunferencia de radio R está comprendido en el ángulo central $2\alpha\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. La cuerda de este arco divide la circunferencia en dos segmentos. En el menor de ellos está inscrito un cuadrado. Hallen el lado del cuadrado.

200. El arco de una circunferencia de radio R está comprendido en el ángulo central $2\alpha\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. La cuerda de dicho arco divide la circunferencia en dos segmentos. En el menor de ellos está inscrito un triángulo regular de modo que uno de sus vértices coincide con el punto medio del arco y los otros dos, yacen en la cuerda del segmento. Hallen el lado del triángulo.

201. El arco de una circunferencia de radio R está comprendido en el ángulo central $2\alpha\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. La cuerda de este arco divide la circunferencia en dos segmentos. En el mayor de ellos está inscrito un triángulo regular de forma que uno de sus vértices coincide con el punto medio de la cuerda y los otros dos, yacen en el arco. Hallen el lado del triángulo.

202. En un triángulo isósceles está inscrita una circunferencia de radio a. Otra circunferencia de radio b es tangente a los lados laterales del triángulo y a la circunferencia inscrita. Hallen la base del triángulo.

203. En el segmento AC de 12 cm de longitud se ha tomado el punto B de forma que $AB = 4$ cm. En AC y AB, como en el diámetro, se han trazado circunferencias. Hallen el radio de la circunferencia tangente a las dos dadas y al segmento AC.

204. La base de un triángulo isósceles es b, el ángulo en la base, α. En el triángulo está inscrita una circunferencia. La segunda circunferencia es tangente a la primera y a los lados laterales del triángulo. Hallen el radio de la segunda circunferencia.

205. En una circunferencia de radio R con centro en O, se han trazado los radios OA y OB de forma que $\angle AOB=\alpha\ \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$. Hallen el radio de la circunferencia tangente al arco AB del sector OAB, a la cuerda AB y a la bisectriz del ángulo AOB.

206. Dos círculos iguales de radio a están situados de manera que la distancia entre sus centros es igual a a. La intersección de los círculos está dividida por la línea de los centros en dos triángulos curvilíneos en uno de los cuales está inscrita una circunferencia. Hallen la longitud del segmento que une los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con las dos circunferencias dadas.

207. Del punto A a la circunferencia con el centro en O y radio de 2 cm, se ha trazado la tangente AK. El segmento OA interseca la circunferencia en

el punto M y forma con la tangente un ángulo de 60°. Hallen el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo curvilíneo MKA.

208. Del punto A, alejado del centro O de una circunferencia de radio r a una distancia a ($a > r$), se traza un rayo que forma un ángulo de 60° con el rayo AO y que interseca la circunferencia en dos puntos K y P (K yace entre A y P). Hallen el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo curvilíneo MKA, donde M es el punto de intersección de la circunferencia con el segmento AO.

209. La base de un triángulo isósceles es igual a b, el ángulo en la base, a α. En el triángulo está inscrita una circunferencia. Otra circunferencia es tangente a la primera, a la base y al lado lateral del triángulo. Hallen el radio de la segunda circunferencia.

210. Una circunferencia está circunscrita al triángulo isósceles de base b y ángulo en ella α. La segunda circunferencia es tangente a la primera y a los lados laterales del triángulo. Hallen el radio de la segunda circunferencia.

211. En el segmento de una circunferencia de radio R y ángulo central $\alpha (\alpha < \pi)$ están inscritas dos circunferencias iguales, tangentes entre sí. Hallen sus radios.

212. Los puntos D, K y M yacen en los lados AB, BC y AC, respectivamente, del triángulo ABC. Demuestren que las circunferencias circunscritas a los triángulos ADM, BDK y CKM concurren en un punto.

213. Desde el punto C se han trazado dos tangentes AC y BC a la circunferencia de radio 12 cm con centro en el punto O. En el triángulo ABC está inscrita una circunferencia con centro en O_1 tangente a los lados AC y BC en los puntos K y H. Hallen el $\angle AOB$ si la distancia desde el punto O_1 hasta la recta KH es igual a 3 cm.

214. Desde el centro O de una circunferencia de radio R se han trazado los radios OA y OB de modo que $\angle AOB = \alpha$ ($\alpha < \pi$). En el segmento menor del círculo, cortado por la cuerda AB, está inscrito un triángulo regular. Uno de los lados de éste es perpendicular a la cuerda AB. Hallen el lado del triángulo.

215. En una circunferencia de radio r se han trazado el diámetro AB y la cuerda AC. En el triángulo curvilíneo formado está inscrita una circunferencia. Hallen su radio si $\angle CAB = \alpha$.

216. En una circunferencia con el centro en O, el radio OM y la cuerda KP se cortan en el punto A, con la particularidad de que $\angle MAK = \alpha \left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. En el triángulo curvilíneo formado MAK está inscrita una circunferencia. Hallen su radio si $OM = r$, $OA = a$.

217. Desde el punto A de una circunferencia de radio r, se han trazado el diámetro AD y dos cuerdas AB y AC. Hallen el radio de la circunferencia tangente a las cuerdas AB y AC y el arco BC si $AB = b$, $\angle BAC = \alpha$ y $AB > AC$.

218. En un lado del ángulo α se dan dos puntos, desde los cuales la distancia hasta el otro lado del ángulo es b y c ($b < c$). Hallen el radio de la circunferencia que pasa por estos dos puntos y que es tangente al otro lado del ángulo.

219. El ángulo AOB es igual a α. La circunferencia es tangente al lado AO en el punto C y corta el lado OB en los puntos D y E. Hallen DE y el radio de la circunferencia si sabemos que $OC = a$ y $OD = b$ ($b > a$).

§ 4. ÁREAS DE LAS FIGURAS PLANAS

EJEMPLO 1. El punto H es el ortocentro del triángulo ABC. En la recta CH se ha tomado un punto K tal que ABK es un triángulo rectángulo. Demuestren que el área del $\triangle ABK$ es la media proporcional entre las áreas de los triángulos ABC y ABH (fig. 55).

SOLUCIÓN. Introduzcamos las anotaciones: $S_{ABK}=S$, $S_{ABC}=S_1$, $S_{ABH}=S_2$. Entonces, $S=\frac{1}{2}AB\cdot KD$, $S_1=\frac{1}{2}AB\cdot CD$, $S_2=\frac{1}{2}AB\times$ $\times HD$. Hay que demostrar que

$$S=\sqrt{S_1S_2}, \tag{1}$$

es decir, que $\frac{1}{2}AB\cdot KD=\sqrt{\frac{1}{2}AB\cdot CD\cdot\frac{1}{2}AB\cdot HD}$ o bien, que

$$KD^2=CD\cdot HD. \tag{2}$$

Pero el triángulo ABK es rectángulo y, por ello, $KD^2=BD\cdot AD$ (teorema 6a). Así, pues, la igualdad (2) será establecida si demos-

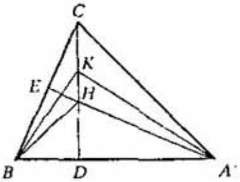


Fig. 55

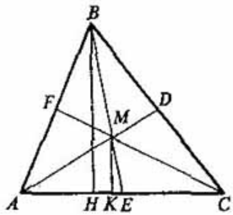


Fig. 56

tramos que $BD\cdot AD=CD\cdot DH$ o bien que $\frac{BD}{CD}=\frac{DH}{AD}$. La última igualdad se desprende con suficiente evidencia de la semejanza de los triángulos rectángulos BCD y HDA (en éstos, $\angle BCD$ y $\angle HAD$ son iguales como ángulos con lados perpendiculares entre sí, ya que AE es la altura del triángulo). Esto significa que la igualdad (2), así como también la (1), quedan demostradas.

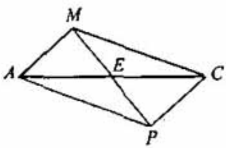


Fig. 57

EJEMPLO 2. Conociendo las medianas m_a, m_b y m_c de un triángulo calculemos su área.

SOLUCIÓN. Ante todo, señalemos que $S_{AMC}=\frac{1}{3}\,S_{ABC}$ (fig. 56). En efecto, la base AC de estos triángulos es común y, por consiguiente, la razón de sus áreas será como la de las alturas MK y BH (teorema 18). Pero de la semejanza de los triángulos MKE y BHE llegamos a la conclusión de que $\frac{MK}{BH}=\frac{ME}{BE}$ y $ME:BE=1:3$ (teorema 3b). Así, pues, el área buscada S es igual a $3S_{AMC}$.

Examinemos el triángulo AMC (fig. 57). En él conocemos dos lados: $AM=\frac{2}{3}m_a$, $MC=\frac{2}{3}m_c$ y la mediana $ME=\frac{1}{3}m_b$ (de nuevo

hacemos uso del teorema 3b). Duplicamos la mediana hasta convertir el triángulo en el paralelogramo $MCPA$, después de lo cual obtenemos: $S_{AMC}=S_{MCP}=\frac{1}{2}S_{AMCP}$. En el triángulo MCP son conocidos tres lados: $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$, es decir, el área del triángulo MCP puede hallarse con ayuda de la fórmula de Herón (teorema 19e). De modo que $S=3S_{AMC}=3S_{MCP}=$
$=3\sqrt{\frac{1}{3}(m_a+m_b+m_c)\cdot\frac{1}{3}(m_a+m_b-m_c)\cdot\frac{1}{3}(m_a+m_c-m_b)\times}$
$\overline{\times\frac{1}{3}(m_b+m_c-m_a)}=\frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_a+m_b-m_c)\times}$
$\overline{\times(m_a+m_c-m_b)(m_b+m_c-m_a)}$.

EJEMPLO 3. Hallemos el área de un triángulo con ángulos α, β, γ, sabiendo que las distancias desde el punto arbitrario M, tomado dentro del triángulo, hasta sus lados son iguales a m, n y k, respectivamente, (fig. 58).

SOLUCIÓN. El área S del triángulo ABC es posible de hallar con la fórmula $S=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\operatorname{sen}\gamma$, pero, para ello, hay que hallar AC y BC. Hagamos $BC=x$. Entonces, de acuerdo con el teorema de los senos (teorema 8) $\frac{AC}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{BC}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{AB}{\operatorname{sen}\gamma}$, de donde hallamos: $AC=\frac{x\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$, $AB=\frac{x\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$.

Así, pues, el problema se reduce a la búsqueda de x. Para confeccionar las ecuaciones empleamos el método de las áreas (véase el § 1): elegimos como elemento de referencia el área S del triángulo ABC.

Por un lado, tenemos:

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BC\operatorname{sen}\gamma=\frac{1}{2}\cdot\frac{x\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}x\operatorname{sen}\gamma=\frac{x^2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}{2\operatorname{sen}\alpha}.$$

Por otro lado, $S=S_{AMB}+S_{BMC}+S_{AMC}=\frac{1}{2}AB\cdot k+\frac{1}{2}BC\times$ $\times n+\frac{1}{2}AC\cdot m=\frac{1}{2}\cdot\frac{x\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot k+\frac{1}{2}xn+\frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot m=$ $=\frac{x(k\operatorname{sen}\gamma+n\operatorname{sen}\alpha+m\operatorname{sen}\beta)}{2\operatorname{sen}\alpha}$.

Así, pues, $\frac{x^2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}{2\operatorname{sen}\alpha}=\frac{x(k\operatorname{sen}\gamma+n\operatorname{sen}\alpha+m\operatorname{sen}\beta)}{2\operatorname{sen}\alpha}$, de donde hallamos: $x=\frac{k\operatorname{sen}\gamma+n\operatorname{sen}\alpha+m\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}$.

Poniendo este valor de x en la primera de las fórmulas señaladas más arriba para el área del triángulo ABC, obtenemos:

$$S=\frac{x^2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}{2\operatorname{sen}\alpha}=\frac{(k\operatorname{sen}\gamma+n\operatorname{sen}\alpha+m\operatorname{sen}\beta)^2}{2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}.$$

EJEMPLO 4. En el triángulo ABC, en los lados AB y BC, se han tomado los puntos K y P de forma que $AK : BK = 1 : 2$, $CP : PB = 2 : 1$. Las rectas AP y CK se cortan en el punto E. Hallemos el área del triángulo ABC si sabemos que el área del triángulo BEC es igual a 4 cm² (fig. 59).

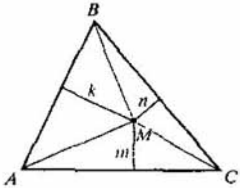


Fig. 58

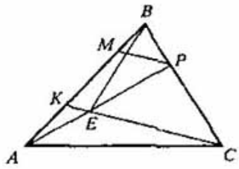


Fig. 59

SOLUCIÓN. Hagamos $AK = x$, $BK = 2x$, $BP = y$, $CP = 2y$ y tracemos $PM \parallel KC$. Según el teorema de Fales $\frac{BM}{MK} = \frac{BP}{PC} = \frac{1}{2}$. De modo que $BM = \frac{2x}{3}$, $KM = \frac{4x}{3}$.

A continuación, los triángulos AKE y AMP son semejantes, por lo que $\frac{KE}{MP} = \frac{AK}{AM}$, es decir, $\frac{KE}{MP} = \frac{x}{x+\frac{4x}{3}} = \frac{3}{7}$ y, por consiguiente, $KE = \frac{3}{7} MP$. Por otro lado, $\frac{MP}{KC} = \frac{BP}{BC} = \frac{1}{3}$, o sea $MP = \frac{1}{3} KC$. Como resultado, obtenemos que $KE = \frac{1}{7} KC$ y, por esta razón, $EC = \frac{6}{7} KC$.

Analicemos los triángulos BEC y BKC. En ellos, la altura trazada desde el vértice B es común, lo que significa que sus áreas se relacionan como sus bases KC y EC (teorema 18), es decir, $\frac{S_{BKC}}{S_{BEC}} = \frac{KC}{EC} = \frac{7}{6}$. Pero $S_{BEC} = 4$ cm², por consiguiente, $S_{BKC} = \frac{7}{6} \cdot 4 = \frac{14}{3}$ cm².

Por fin, examinemos los triángulos BKC y ABC. En ellos, la altura trazada desde el vértice C es común y sus áreas se relacionan como las bases: $\frac{S_{ABC}}{S_{BKC}} = \frac{AB}{BK} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$.

Como resultado, obtenemos: $S_{ABC} = \frac{2}{3} S_{BKC} = \frac{3}{2} \cdot \frac{14}{3} = 7$ cm².

EJEMPLO 5. En el triángulo ABC ($AB = BC$) el ángulo A es igual a $\operatorname{arctg} \frac{8}{15}$. La circunferencia de radio igual a 1 cm es tangente a los lados AB y BC e interseca la base AC en los puntos E y K (E yace entre A y K). M es el punto de tangencia de la circunferencia y la recta BA, $AM = \frac{15}{8}$ cm. Calculemos el área del triángulo AMK.

SOLUCIÓN. Ante todo, hay que hacer cálculos con el fin de aclarar dónde yace el centro de la circunferencia (por ahora, sólo está claro que él se encuentra en la altura BH del triángulo isósceles ABC, ya que BA y BC son tangentes a la circunferencia y, por lo tanto, el centro de ésta yace en la bisectriz del ángulo entre las rectas) (teorema 12b).

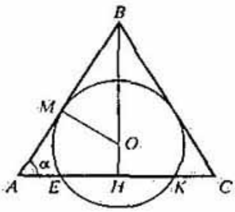


Fig. 60

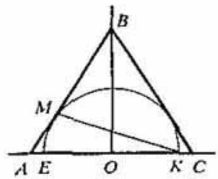


Fig. 61

Introduzcamos la anotación: $\angle BAC = \alpha$ (fig. 60). Tracemos el radio OM al punto de tangencia, entonces el ángulo BOM también es igual a α. De acuerdo con el planteamiento $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$. Empleando la fórmula $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, hallamos: $\cos \alpha = \frac{15}{17}$, entonces $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = \frac{8}{17}$.

Del triángulo BOM hallamos: $BO = \frac{OM}{\cos \alpha} = \frac{1}{\frac{15}{17}} = \frac{17}{15}$, $BM = OM \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$. Seguidamente, $AB = AM + BM = \frac{15}{8} + \frac{8}{15} = \frac{289}{120}$, $BH = AB \operatorname{sen} \alpha = \frac{289}{120} \cdot \frac{8}{17} = \frac{17}{15}$.

Esto significa que $BH = BO$ y, por esta razón, los puntos O y H coinciden y para la posterior resolución del problema hay que hacer una nueva figura (correcta) (fig. 61).

El área del triángulo AMK ha de buscarse con la fórmula $S = \frac{1}{2} AM \cdot AK \cdot \operatorname{sen} \alpha$. Sabemos que $AM = \frac{15}{8}$ cm, $\operatorname{sen} \alpha = \frac{8}{15}$. De este modo, el problema se reduce a buscar el segmento AK.

Hagamos uso de que $AM^2 = AE \cdot AK$ (teorema 16c). Hagamos $AE = x$, entonces $AK = 2 + x$ y obtenemos la ecuación $\frac{225}{64} = x(2 + x)$, de donde $x = \frac{9}{8}$.

En tal caso, $AK=\frac{9}{8}+2=\frac{25}{8}$ cm y, por consiguiente, $S_{AMK}=$ $=\frac{1}{2}AM\cdot AK\cdot\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{8}\cdot\frac{25}{8}\cdot\frac{8}{17}=\frac{375}{272}$ cm².

EJEMPLO 6. Por el punto medio de la diagonal BD del cuadrilátero $ABCD$ se ha trazado una recta paralela a la diagonal AC. Esta recta interseca el lado AD en el punto E. Demostremos que la recta CE divide el cuadrilátero $ABCD$ en dos partes equivalentes (de áreas iguales) (fig. 62).

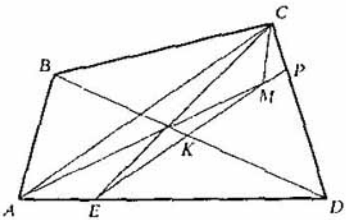


Fig. 62

SOLUCIÓN. Hay que demostrar que el área del cuadrilátero $ABCE$ es igual a la mitad del área del cuadrilátero $ABCD$, lo que significará que las áreas de las figuras $ABCE$ y CED son iguales, es decir, que ellas son equivalentes.

Hemos de indicar que el cuadrilátero $ABCE$ es equivalente al cuadrilátero $ABCM$, donde M es cualquier punto en la recta EP: en efecto, en los triángulos ACE y ACM la base es común y las alturas iguales, ya que los puntos E y M yacen en una misma recta paralela a la base AC. Esta observación nos sugiere sustituir el cuadrilátero $ABCE$ por el cuadrilátero $ABCK$, equivalente a él, donde K es un punto en EP elegido de modo especial. Como K elijamos el punto medio de la diagonal BD (fig. 63).

Tenemos: $S_{ABCK}=\frac{1}{2}AC\cdot BK\cdot\operatorname{sen}\alpha$, donde α es el ángulo entre las diagonales (teorema 20b). Según el planteamiento $BK=$ $=\frac{1}{2}BD$. Así, pues,

$$S_{ABCK}=\frac{1}{2}AC\cdot\frac{1}{2}BD\cdot\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\operatorname{sen}\alpha\right)=\frac{1}{2}S_{ABCD},$$

que es lo que queríamos demostrar.

EJEMPLO 7. El área del cuadrilátero convexo $ABCD$ es igual a 2 cm². Sus lados han sido continuados: el lado AB tras el punto B de forma que $BL=\frac{1}{2}AB$; el lado BC tras el punto C de forma que $CP=\frac{1}{2}BC$; el lado CD tras el punto D de forma que $DE=\frac{1}{2}CD$; el lado DA tras el punto A de forma que $AM=\frac{1}{2}AD$. Hallen el área del cuadrilátero $LPEM$ (fig. 64).

SOLUCIÓN. Induzcamos las anotaciones: $AB=a$, $BC=b$, $CD=$ $=c$, $DA=m$. Examinemos el triángulo AML. En él $AM=\frac{1}{2}m$, $AL=\frac{3}{2}a$. Entonces su área S_1 será igual a $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m\frac{3}{2}a$ sen α, donde $\alpha=\angle MAL$. Comparemos esta expresión con el área del

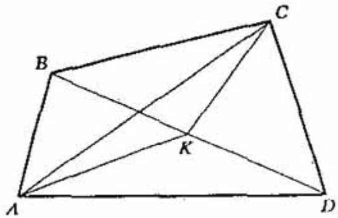


Fig. 63

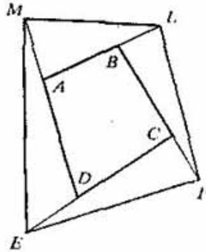


Fig. 64

triángulo ABD; $S_{ABD}=\frac{1}{2}\ AB\cdot AD\cdot \text{sen}\,(180°-\alpha)=\frac{1}{2}\ am$ sen α. Vemos que $S_1=\frac{3}{4}S_{ABD}$.

Por analogía, el área S_3 del triángulo CPE, está ligada con la del triángulo BCD mediante la relación $S_3=\frac{3}{4}S_{CBD}$. De modo que $S_1+S_3=\frac{3}{4}(S_{ABD}+S_{BCD})=\frac{3}{4}S_{ABCD}=\frac{3}{4}\cdot 2=1{,}5\,\text{cm}^2$. De esta misma manera, si hacemos $S_2=S_{BLP}$, $S_4=S_{MDE}$, obtenemos: S_2+ $+S_4=1{,}5\,\text{cm}^2$.

Como resultado, $S_{MLPE}=S_{ABCD}+S_1+S_2+S_3+S_4=$ $=2+1{,}5+1{,}5=5\ \text{cm}^2$.

EJEMPLO 8. Una circunferencia con centro en O está circunscrita al triángulo ABC con ángulo obtuso A. El radio AO forma con la altura AH un ángulo de 30°. La continuación de la bisectriz AF interseca la circunferencia en el punto L y el radio AO interseca BC en el punto E (fig. 65). Calculen el área del cuadrilátero $FEOL$ si sabemos que $AL=4\sqrt{2}$ cm, $AH=\sqrt{2\sqrt{3}}$ cm.

SOLUCIÓN. Si en el ejemplo 6 buscamos el área del cuadrilátero con la fórmula conocida 20b y en él 7, como la suma de las áreas de las partes componentes, en el presente caso es conveniente considerar el cuadrilátero que nos interesa como la diferencia de los triángulos AOL y AFE. Es decir, $S_{FEOL}=S_{AOL}-S_{AFE}$. Por ello, la posterior resolución del problema se reduce, en lo fundamental, al cálculo de diversos elementos (lados, ángulos) de los triángulos AOL y AFE.

Demostremos que $OL \parallel AH$. Con este fin, señalemos que $\angle CAL = \angle LAB$ (según el planteamiento) y, por ello, $\smile CL = \smile BL$. Pero, entonces, son también iguales las cuerdas CL y BL (fig. 66), o sea, CBL es un triángulo isósceles. Mas el centro O de la circunferencia, circunscrita al triángulo isósceles CBL, yace en su altura KL. Es evidente, que $LK \parallel AH$ y, por esta razón, $OL \parallel AH$. En tal caso, $\angle HAF = \angle ALO = \angle LAO = \frac{1}{2}\angle HAO = \frac{1}{2}\cdot 30° = 15°$.

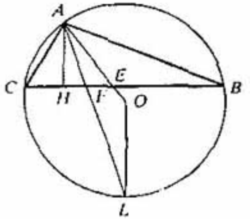


Fig. 65

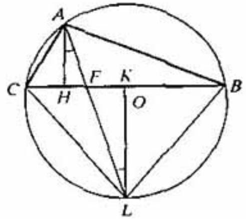


Fig. 66

Hagamos un resumen previo. Sabemos que el triángulo ALO es isósceles con ángulos 15°, 15°, 150° y lado AL, igual a $4\sqrt{2}$ cm. Esto es suficiente para calcular su área.

Según el teorema de los cosenos (teorema 7), tenemos: $AL^2 = AO^2 + OL^2 - 2AO\cdot OL\cdot\cos 150°$, de donde, haciendo $AO = OL = R$, obtenemos: $(4\sqrt{2})^2 = R^2 + R^2 + 2R^2\frac{\sqrt{3}}{2}$, $R^2 = \frac{32}{2+\sqrt{3}} = 32(2-\sqrt{3})$.

A continuación, tenemos: $S_{AOL} = \frac{1}{2}AO\cdot OL\cdot \operatorname{sen} 150° = \frac{1}{2}R^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\cdot 32(2-\sqrt{3}) = 8(2-\sqrt{3})$ cm².

Ahora, calculemos el área del triángulo AFE. Tenemos: $HE = AH \operatorname{tg} 30° = \sqrt{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$, $HF = AH \operatorname{tg} 15° = \sqrt{2\sqrt{3}}\,(2-\sqrt{3})$,

$$FE = HE - HF = \sqrt{2\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 2 + \sqrt{3}\right) = \sqrt{2\sqrt{3}}\,\frac{2(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}.$$

$$S_{AEF} = \frac{1}{2}FE\cdot AH = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3}}\,\frac{2(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\sqrt{2\sqrt{3}} = 2(2-\sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$

Como resultado, $S_{FEOL} = S_{AOL} - S_{AEF} = 8(2-\sqrt{3}) - 2(2-\sqrt{3}) = 6(2-\sqrt{3})$ cm².

EJEMPLO 9. En el pentágono $ABCDE$ sabemos que $AB = \sqrt{2}$, $BC = CD$, $\angle ABE = 45°$ y $\angle DBE = 30°$. Calculemos el área de la figura si a ella es posible circunscribir una circunferencia con radio de 1 cm (fig. 67).

SOLUCIÓN. Calculemos el área del pentágono como la suma de las áreas de los triángulos ABE, BED y BCD. De acuerdo con el teorema de los senos, aplicado al triángulo ABE, hallamos que $\frac{AE}{\operatorname{sen} 45°}=2R$, es decir, $AE=\sqrt{2}$. Esto significa que ABE es un

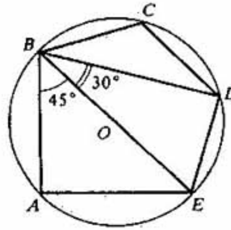


Fig. 67

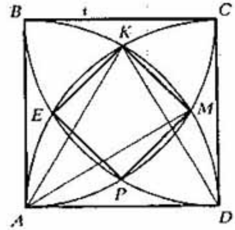


Fig. 68

triángulo isósceles rectángulo en el que $AB=AE=\sqrt{2}$, por lo que $BE=2$ y $S_{ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot AE=1$.

Como $BE=2$, esta recta es el diámentro de la circunferencia. Así, pues, el triángulo BDE es rectángulo; de él hallamos: $DE=1$, $BD=\sqrt{3}$, $S_{BDE}=\frac{1}{2}BD\cdot DE=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Para finalizar, consideramos el triángulo BCD. En él $BD=\sqrt{3}$. Según el teorema de los senos $\frac{BD}{\operatorname{sen}\angle BCD}=2R$, o sea, $\operatorname{sen}\angle BCD=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

De aquí hallamos que $\angle BCD=120°$ y $\angle CBD=\angle CDB=30°$. Ya que $\frac{BC}{\operatorname{sen} 30°}=2R$, hallamos que $BC=CD=1$ y

$$S_{BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\operatorname{sen}\angle BCD=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Como resultado, obtenemos: $S_5=1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{4+3\sqrt{3}}{4}$.

EJEMPLO 10. Los centros de cuatro círculos están situados en los vértices de un cuadrado con lado a; los radios son iguales a a. Calculen el área de la intersección de los círculos (fig. 68).

SOLUCIÓN. Por consideraciones de simetría sigue que el cuadrilátero $EKMP$ es un cuadrado. Esto significa, que la figura buscada es la unión de un cuadrado y cuatro segmentos iguales. Para calcular el área de un segmento, ante todo, hay que hallar el correspondiente ángulo central. Como el triángulo AKD es equilátero, $\angle KAD = 60°$, es decir, $\angle BAK = 30°$. Por analogía, obtenemos que $\angle MAD = 30°$, y, por ello, $\angle KAM = 30°$. Con el fin de hallar el área del segmento, aplicamos el teorema 24 y se obtiene: $S_{\text{segm}} = \frac{1}{2} a^2 \times \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\right)$.

Para hallar el lado del cuadrado $EKMP$, aplicamos al triángulo AKM el teorema de los cosenos: $KM^2 = AK^2 + AM^2 - 2AK \times AM \cdot \cos 30°$, es decir, $KM^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a^2 (2 - \sqrt{3})$.

Como resultado, obtenemos: $S = S_{\text{cuad}} + 4S_{\text{segm}} = a^2 (2 - \sqrt{3}) + 2a^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\right) = a^2 \left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$.

EJEMPLO 11. Una circunferencia es tangente a los lados AC y BC del triángulo ABC en los puntos D y E, respectivamente, y tiene

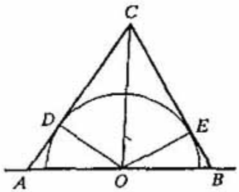


Fig. 69

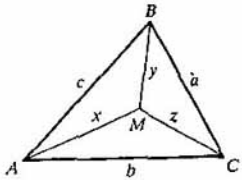


Fig. 70

su centro en el lado AB. Hallemos el área del sector DOE si $BC = 13$ cm, $AB = 14$ cm, $AC = 15$ cm (fig. 69).

SOLUCIÓN. Para buscar el radio del sector empleamos el método de las áreas (véase el § 1). Por un lado, el área S del triángulo ABC puede ser hallada con ayuda de la fórmula de Herón (teorema 19e): $S = 84$ cm². Por otro, $S = S_{AOC} + B_{BOC} = \frac{1}{2} AC \cdot DO + \frac{1}{2} BC \cdot OE = \frac{1}{2} (15 + 13) r = 14 r$. Así, pues, $14 r = 84$, $r = 6$ cm.

Con el fin de hallar el área del sector, hay que conocer su ángulo central, o sea, $\angle DOE$. Considerando el cuadrilátero $ODCE$ llegamos a la conclusión de que $\angle DOE = \pi - \gamma$, donde $\gamma = \angle ACB$. Según el teorema de los cosenos $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \gamma$. Esto significa, que $14^2 = 13^2 + 15^2 - 2 \cdot 13 \cdot 15 \cdot \cos \gamma$, de donde hallamos que $\cos \gamma = \frac{99}{195}$, por lo que $\gamma = \arccos \frac{99}{195}$. Como resultado, obtenemos que el ángulo central del sector es igual a $\pi - \arccos\frac{99}{195}$.

De acuerdo con el teorema 23, obtenemos: $S_{sector} = \frac{1}{2} \times \times r^2 \left(\pi - \arccos\frac{99}{195}\right) = 18\left(\pi - \arccos\frac{99}{195}\right)$.

EJEMPLO 12. Dentro del triángulo ABC, con lados a, b y c, se ha tomado el punto M de forma que desde él los lados del triángulo se ven bajo diferentes ángulos. Hallemos $AM + BM + CM$ (fig. 70).

SOLUCIÓN. A diferencia de los anteriores, en este problema no se trata del cálculo del área de una figura plana. Pero, a pesar de esto, como veremos, el área del triángulo será el medio para su resolución.

Hagamos $AM = x$, $BM = y$ y $CM = z$. De acuerdo con el planteamiento $\angle AMB = \angle BMC = \angle AMC = 120°$. El empleo del teorema de los cosenos con relación a cada uno de los triángulos AMB, BMC y AMC nos permite obtener el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a^2 = z^2 + y^2 + yz, \\ b^2 = x^2 + z^2 + xz, \\ c^2 = x^2 + y^2 + xy. \end{cases}$$

Seguidamente, tenemos: $S = S_{ABC} = S_{AMC} + S_{BMC} + S_{AMB} = = \frac{1}{2} xz \operatorname{sen} 120° + \frac{1}{2} yz \operatorname{sen} 120° + \frac{1}{2} xy \operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + xy)$.

Así, pues, $xy + xz + yz = \frac{4S}{\sqrt{3}}$, donde $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$.

Hay que hallar el valor de la suma $x + y + z$. Tenemos: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$. Sumando las tres ecuaciones del sistema, obtenemos: $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - - \frac{1}{2}(xy + xz + yz)$.

Así, pues, $(x + y + z)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{3}{2}(xy + xz + yz) = = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{4S}{\sqrt{3}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + 2S\sqrt{3}$ y, por lo tanto, $x + + y + z = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2} + 2S\sqrt{3}}$.

EJEMPLO 13. En el triángulo ABC conocemos que $AC : BC = = 2 : 1$ y $\angle C = \arccos\frac{3}{4}$. En el lado AC se toma el punto D de forma que $CD : AD = 1 : 3$. Hallen la razón entre el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABD.

SOLUCIÓN. Introduzcamos el parámetro auxiliar $CD = a$. Entonces, $AD = 3a$, $AC = 4a$, $BC = 2a$ (fig. 71).

Para hallar el radio R de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC calculemos el lado AB según el teorema de los cosenos y, a continuación, hagamos uso del teorema de los senos. Tenemos:

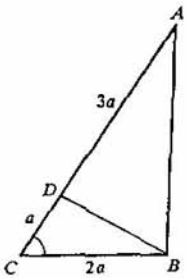


Fig. 71

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$, es decir, $AB^2 = 16a^2 + 4a^2 - 2 \cdot 4a \cdot 2a \cdot \frac{3}{4}$, de donde hallamos que $AB = 2a\sqrt{2}$.

De acuerdo con el planteamiento, $\cos C = \frac{3}{4}$, o sea, $\operatorname{sen} C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Según el teorema de los senos $\frac{AB}{\operatorname{sen} C} = 2R$, de modo que $\frac{2a\sqrt{2}\cdot 4}{\sqrt{7}} = 2R$, de donde hallamos: $R = \frac{4a\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

El radio r de la circunferencia inscrita en el triángulo ABD puede ser calculado con la fórmula $r = \frac{S}{p}$, donde S es el área, p, el semiperímetro del triángulo ABD. Ya sabemos que $AD = 3a$, $AB = 2a\sqrt{2}$. El lado BD se halla con ayuda del triángulo BCD, según el teorema de los senos: $BD^2 = a^2 + 4a^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \frac{3}{4}$, de donde $BD = a\sqrt{2}$. Así, pues, $p = \frac{3a + 2a\sqrt{2} + a\sqrt{2}}{2} = \frac{3a}{2} + \frac{3a\sqrt{2}}{2}$. El área S del triángulo ABD se calcula con la fórmula de Herón;

$$S = \sqrt{p(p-AD)(p-AB)(p-BD)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3a}{2} + \frac{3a\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3a}{2}\right)\left(\frac{3a}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3a}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\right.} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{9a^2}{2} - \frac{9a^2}{4}\right)\left(\frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right)} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{4}.$$

Así, pues, $r = \frac{S}{p} = \frac{a\sqrt{7}}{2(\sqrt{2}+1)}$, $\frac{R}{r} = \frac{8}{7}(2+\sqrt{2})$.

PROBLEMAS PARA EL TRABAJO INDIVIDUAL

I. Área del triángulo

220. Demuestren que el área de un triángulo es igual a $\frac{2}{3} m_a m_b \operatorname{sen} \alpha$, donde: m_a, m_b son las medianas, α, el ángulo entre ellas.

221. En el triángulo ABC son conocidos $AC = 3$ cm, $\angle A = 30°$, el radio de la circunferencia circunscrita, 2 cm. Demuestren que el área del $\triangle ABC$ es menor que 3 cm².

222. Demuestren que $S \leqslant \frac{b^2+c^2}{4}$, donde b y c son los lados del triángulo, S, su área.

223. Los lados de un triángulo son iguales a 55, 55, 66 cm. Hallen el área del triángulo cuyos vértices sirven de base a las bisectrices de la figura dada.

224. En el triángulo ABC son conocidos los lados: $AB = 13$ cm, $BC = 15$ cm, $AC = 14$ cm. Se han trazado la altura BH, la bisectriz BD, la mediana BM. Hallen: a) el área del triángulo BHD; b) el área del triángulo BMD; c) el área del triángulo BHM.

225. En cada una de las medianas de un triángulo se ha tomado un punto que divide la mediana en la razón 5 : 1, contando desde el vértice. Hallen el área del triángulo con los vértices en dichos puntos si el área del triángulo inicial es igual a 64 cm^2.

226. En un triángulo con base igual a a está inscrito un cuadrado. Hallen el área del triángulo si conocemos que el lado del cuadrado es mayor que la mitad de la base del triángulo y el área del cuadrado constituye $\frac{1}{4}$ parte de la del triángulo.

227. Una circunferencia de radio 4 cm está circunscrita al triángulo ABC con ángulo $B = 60°$. El diámetro de la circunferencia, perpendicular al lado BC, interseca AB en el punto M de forma que $AM : BM = 2 : 3$. Hallen el área del triángulo.

228. Hallen el área de un triángulo rectángulo con hipotenusa c si sabemos que la suma de los senos de sus ángulos agudos es igual a q.

229. Hallen el área de un triángulo rectángulo con ángulo agudo α si sabemos que la distancia desde el vértice del otro ángulo agudo hasta el centro de la circunferencia inscrita es igual a m.

230. En el triángulo ocutángulo ABC son conocidos $AB = c$, la mediana $BD = m$, $\angle BDA = \beta$ $(\beta < 90°)$. Hallen el área del $\triangle ABC$.

231. Por el vértice del ángulo α en la base de un triángulo isósceles se ha trazado una recta bajo el ángulo β a la base $(\beta < \alpha)$ que divide el triángulo en dos partes. Hallen la razón entre las áreas de dichas partes.

232. Por el punto medio del lado de un triángulo regular se ha trazado una recta que forma con el mencionado lado el ángulo agudo α. Hallen la razón entre las áreas de aquellas partes en las que la recta ha dividido el triángulo.

233. En el triángulo ABC son conocidos dos ángulos: $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Se han trazado la bisectriz BD, la altura BH y la mediana BM. Hallen: a) la razón entre las áreas de los triángulos BDM y ABC; b) la razón entre las áreas de los triángulos BHM y ABC; c) la razón entre las áreas de los triángulos BHD y ABC.

234. Hallen el área del triángulo si se conocen sus lados a y b y la bisectriz $l_c = l$.

235. La mediana AD del triángulo ABC interseca en el punto E la circunferencia circunscrita al triángulo. Hallen el área del triángulo ABC si sabemos que $\angle BAD = 60°$, $AB + AD = DE$, $AE = 6$.

236. Demuestren que $S < \frac{1}{2}\pi R^2$, donde S es el área del triángulo, R, el radio de la circunferencia circunscrita a él.

237. Uno de los ángulos de un triángulo es igual a 60°. El punto de tangencia de la circunferencia inscrita divide el lado opuesto a dicho ángulo en los segmentos a y b. Hallen el área del triángulo.

238. En el triángulo ABC, del punto M al lado AB, se han trazado las rectas $MQ \parallel AC$ y $MP \parallel BC$. Hallen el área del triángulo ABC si sabemos que el área del triángulo BMQ es igual a S_1 y la del triángulo AMP, a S_2.

239. Por un punto tomado en el interior del triángulo, se han trazado rectas paralelas a sus lados. Ellas dividen el triángulo en 6 partes entre las que hay tres triángulos con áreas S_1, S_2 y S_3. Hallen el área del triángulo inicial.

240. En un triángulo con lados de 16, 30 y 34 cm está inscrita una circunferencia. Hallen el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia.

241. En una circunferencia está inscrito el triángulo ABC con lado $AC = 20$ cm. Por el punto B está trazada una tangente a la circunferencia distanciada de los puntos A y C a 25 y 16 cm, respectivamente. Hallen el área del triángulo ABC.

242. Del punto M, situado en el interior del triángulo ABC, se bajan las perpendiculares MD, ME y MF a los lados AB, BC y AC, respectivamente. Hallen la razón entre las áreas de los triángulos ABC y DEF si sabemos que $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $ME = k$, $MF = m$ y $MD = n$.

243. En el triángulo ABC se han trazado las alturas AD, BE y CF. Hallen la razón entre las áreas de los triángulos DEF y ABC si son conocidos los ángulos del triángulo ABC: α, β y γ.

244. La cuerda AB contiene el arco de una circunferencia cuya longitud es igual a $\frac{1}{3}$ de la circunferencia. En dicho arco se toma el punto C, mientras que en la cuerda AB, el punto D. Hallen el área del triángulo ABC si sabemos que $AD = 2$ cm, $BD = 1$ cm y $CD = \sqrt{2}$ cm.

245. En el triángulo ABC el ángulo C es igual a $60°$ y el radio de la circunferencia circunscrita es igual a $2\sqrt{3}$ cm. En AB se toma el punto D de forma que $AD : DB = 2 : 1$, $CD = 2\sqrt{2}$ cm. Hallen el área del triángulo ABC.

246. En el triángulo ABC $(AB = BC)$ el ángulo A es igual a $\arcsen \frac{5}{13}$. La circunferencia, cuyo centro está distanciado a $\frac{13}{24}$ cm del vértice B, es tangente a los lados AB en el punto K y BC, en P y corta en la base AC el segmento EF. Hallen el área del triángulo EPC si sabemos que $PC = \frac{6}{5}$ cm.

247. Al triángulo ABC está circunscrita una circunferencia. La tangente a ésta en el punto B interseca la recta AC en el punto D (el punto C yace entre A y D). Hallen el área del triángulo BCD si sabemos que $\angle BDC = \arccos \frac{21}{29}$, $BD = 29$ cm y la distancia desde el centro de la circunferencia hasta AC es igual a 10 cm.

II. Área del cuadrilátero

248. Por los vértices de un cuadrilátero se trazan rectas paralelas a sus diagonales. Demuestren que el área del paralelogramo obtenido es dos veces mayor que la del cuadrilátero dado.

249. Los lados de un paralelogramo son a y b, el ángulo entre ellos, α. Hallen el área del paralelogramo formado por las bisectrices de los ángulos internos de la figura.

250. La línea media de un trapecio isósceles es igual a a, las diagonales son perpendiculares entre sí. Hallen el área del trapecio.

251. El perímetro del trapecio es igual a 52 cm, la base menor, a 1 cm. Hallen el área del trapecio si sabemos que sus diagonales son las bisectrices de los ángulos obtusos.

252. Las circunferencias de radios 4 y 8 cm, con sus centros en los puntos O_1 y O_2, se cortan en los puntos C y D, AB es la tangente externa común. Hallen el área del cuadrilátero O_1BAO_2 si sabemos que las tangentes a las circunferencias, trazadas en el punto C, son perpendiculares entre sí.

253. Dos circunferencias iguales de radio R, con sus centros en los puntos O_1 y O_2, son tangentes exteriores. La recta l interseca dichas circunferencias en

los puntos A, B, C y D de forma que $AB = BC = CD$. Hallen el área del cuadrilátero O_1ADO_2.

254. Los lados de un triángulo son iguales a 20, 34 y 42 cm. La altura que se encuentra en el interior del triángulo, está dividida en la razón 3 : 1, contando desde el vértice. Desde el punto de división está trazada una recta perpendicular a la mencionada altura. Hallen el área del trapecio obtenido.

255. Los lados de un triángulo son iguales a 20, 34 y 42 cm. Hallen el área del paralelogramo inscrito si sabemos que su perímetro es igual a 45 cm.

256. Las bases de un trapecio son iguales a 62 y 20 cm, los lados, a 45 y 39 cm. Hallen el área de la figura.

257. Las bases de un trapecio son iguales a 30 y 12 cm, las diagonales, a 20 y 34 cm. Hallen el área de la figura.

258. Una de las bases de un trapecio es igual a 7 cm. La circunferencia inscrita en él divide uno de sus lados en segmentos de 4 y 9 cm. Hallen el área del trapecio.

259. En el trapecio $ABCD$ K es el punto medio de la base AD, M, el punto medio de la base BC, BK, la bisectriz del ángulo ABC, DM, la bisectriz del ángulo ADC. Hallen el área del trapecio $ABCD$ si su perímetro es igual a 30 cm y $\angle BAD = 60°$.

260. En el cuadrilátero convexo $ABCD$ E, F, P y K son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y AD, respectivamente. Sabemos que $EP = KF$. Hallen el área del cuadrilátero $ABCD$ si $AC = 15$ cm y $BD = 20$ cm.

261. Hallen el área de un paralelogramo si sus lados son a y b $(a > b)$ y el ángulo entre las diagonales, α.

262. Hallen el área de un trapecio con ángulo agudo α en la base si sabemos que una de las bases de la figura es el diámetro de la circunferencia de radio R circunscrita al trapecio.

263. En un trapecio con ángulos agudos α y β está inscrito un círculo. Hallen la razón entre las áreas del trapecio y el círculo.

264. En el triángulo ABC se conocen los ángulos: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ y la altura $BD = H$. Como sobre su diámetro, en BD se traza una circunferencia que corta los lados AB y BC en los puntos E y F. Hallen el área del cuadrilátero $BFDE$.

265. La recta l, paralela a la base AC del triángulo ABC, corta de él el triángulo BED. En el lado AC se toma al azar el punto M. Demuestren que el área del cuadrilátero $BEMD$ es la media proporcional entre las áreas de los triángulos ABC y DBE.

266. En el trapecio $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ las diagonales concurren en el punto O. Hallen el área del trapecio si se conoce que el área del triángulo AOD es igual a a^2 y la del triángulo BOC, a b^2.

267. En el rombo $ABCD$ M, N, P y Q son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y AD, respectivamente. Hallen el área del cuadrilátero limitado por las rectas AN, BP, DM y CQ si el área del rombo es igual a 100 cm².

268. Dos circunferencias de radios a y b son tangentes exteriores. A ellas se han trazado tangentes externas comunes. Hallen el área del cuadrilátero, cuyos vértices son los puntos de tangencia.

269. Las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ concurren en el punto O. Hallen el área del cuadrilátero si sabemos que las áreas de los triángulos AOB, BOC y COD son iguales a 12, 18 y 24 cm², respectivamente.

270. Una circunferencia es tangente a los lados AB y AD del rectángulo $ABCD$, pasa por el vértice C y corta el lado DC en el punto K. Hallen el área del cuadrilátero $ABKD$ si $AB = 9$ cm, $AD = 8$ cm.

271. Dentro del rectángulo $ABCD$ se toma el punto M de forma que $AM = \sqrt{2}$, $BM = 2$ y $CM = 6$. Hallen el área de rectángulo $ABCD$ si sabemos que $AD = 2AB$.

III. Área del polígono

272. En los catetos AC y BC y la hipotenusa AB del triángulo rectángulo ABC, como en los lados, están construidos los cuadrados (fuera del triángulo) $CMPA$, $BEFC$ y $ADKB$. Hallen el área del hexágono $DKEFMP$ si $AB = c$ y $S_{\Delta ABC} = S$.

273. En los lados AC, BC y AB del triángulo ABC están construidos los cuadrados $CMPA$, $BEFC$ y $ADKB$. Hallen el área del hexágono $DKEFMP$ si sabemos que $AB = 13$ cm, $AC = 14$ cm, $BC = 15$ cm.

274. El cuadrado prefijado con lado a, está cortado por los ángulos de forma que se obtiene un octágono regular. Hallen su área.

275. Sea dado un cuadrado con lado a. En cada uno de sus lados, fuera de él, está construido un trapecio de forma que las bases superiores de éstos y sus lados forman un dodecágono regular. Hallen el área de esta figura.

276. Una circunferencia está dividida en ocho partes con los puntos A, B, C, D, E, F, P y K. Es conocido que $\cup AB = \cup CD = \cup EF = \cup PK$ y $\cup BC = \cup DE = \cup FP = \cup KA$; además, $\cup AB = 2 \cup BC$. Hallen el área del octágono $ABCDEFPK$ si el área del círculo es igual a $289\ \pi\ \text{cm}^2$.

277. En un círculo de radio R está inscrito un triángulo regular y un cuadrado que tienen un vértice común. Hallen el área de su intersección.

278. Cada uno de los lados de un triángulo está dividido en tres partes en la razón $3 : 2 : 3$. Hallen la razón entre el área del hexágono, cuyos vértices son los puntos de división, y el área del triángulo.

279. El área del cuadrilátero $ABCD$ es igual a $12\ \text{cm}^2$. En los lados AB, BC, CD y DA se toman los puntos F, K, M y P de forma que $AF : FB = 2 : 1$, $BK : KC = 1 : 3$, $CM : MD = 1 : 1$ y $DP : PA = 1 : 5$. Hallen el área del hexágono $AFKCMP$.

IV. Áreas de figuras combinadas

280. Los lados del triángulo son iguales a 20, 34 y 42 cm. Hallen la razón de las áreas de los círculos inscrito y circunscrito.

281. El lado de un triángulo regular es igual a a. En él, como en su diámetro, se ha construido un círculo. Hallen el área de aquella parte del triángulo que yace fuera del círculo.

282. Un círculo está inscrito en un triángulo regular. Con centro en uno de los vértices del triángulo se traza el segundo círculo, cuyo radio es igual a la mitad del lado de triángulo. ¿Qué parte del área del triángulo constituye el área de la intersección de los círculos?

283. Dos circunferencias con radios a y b ($a > b$) son tangentes exteriores. A ellas se traza una tangente externa común. Hallen: a) el área del triángulo curvilíneo obtenido; b) el área del círculo inscrito en ese triángulo.

284. El lado de un triángulo regular es igual a a. El centroide del triángulo es el centro de un círculo de radio $\frac{a}{3}$. Hallen el área de la parte del triángulo que se encuentra fuera del círculo.

285. Dentro de un cuadrado con lado a, sobre cada lado como en su diámetro, se construyen semicírculos. Hallen el área de la roseta obtenida.

286. Cada una de las n circunferencias iguales es tangente a las dos vecinas. Hallen el área de la figura limitada por los arcos más próximos entre sí de estas circunferencias si sabemos que el radio de la circunferencia, con la que todas las circunferencias dadas son tangentes interiores, es igual a R y que: a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) $n = 6$.

287. Desde un punto tomado en una circunferencia de radio R se han trazado dos cuerdas iguales; el ángulo entre éstas es igual a α. Hallen el área de la parte del círculo contenida entre esas cuerdas.

288. Sea $ABCDEK$ un hexágono regular con lado a y con su centro en el punto O. Se han trazado tres circunferencias: la primera, con centro en el punto A, pasa por los puntos C y E; la segunda, con centro en el punto B, pasa por los puntos O y C; la tercera, con centro en el punto K, pasa por los puntos O y E. Hallen el área de la figura limitada por las tres circunferencias mencionadas situada en el interior del hexágono.

289. Dos circunferencias de radios R y $2R$ están situadas de tal forma que la distancia entre sus centros O_1 y O_2 es igual a $2R\sqrt{3}$. A ellas se han trazado tangentes comunes que concurren en cierto punto del segmento O_1O_2. Hallen el área de la figura limitada por los segmentos de las tangentes y los grandes arcos de las circunferencias que unen los puntos de tangencia.

290. La base de un triángulo es igual a a, los ángulos en la base, 15° y 45°. Con centro en el vértice opuesto a la base del triángulo y con radio igual a la altura trazada desde dicho vértice se construye un círculo. Hallen el área de la parte de éste situada dentro del triángulo.

291. Dos círculos de igual radio están situados de forma que la distancia entre sus centros es igual al radio. Hallen la razón entre el área de la intersección de los círculos y la de un cuadrado inscrito en ella.

292. Se da una semicircunferencia de diámetro AB. C es un punto arbitrario en el diámetro AB. Desde el punto C se levanta una perpendicular CD al diámetro, hasta su intersección con la semicircunferencia en el punto D. En AC y CB, como en los diámetros, se construyen semicircunferencias situadas en el interior de la dada. Demuestren que el área de la figura limitada por las tres semicircunferencias es igual a la del círculo construido en CD como en su diámetro.

293. En el triángulo ABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ y $AC = b$. Las alturas AD y BE concurren en el punto H. Al triángulo HDE está circunscrito un círculo. Hallen el área de la intersección del círculo y el triángulo.

294. En el interior de un n-gono regular con lado a están situados n círculos iguales de forma que cada uno de ellos es tangente a dos otros y al lado del n-gono. Hallen el área de la «estrella» formada en el centro del n-gono.

295. En el interior de un n-gono regular con lado a están situados n círculos iguales de forma que cada uno de ellos es tangente a dos lados adyacentes del n-gono y a otros dos círculos. Hallen el área de la «estrella» formada en el interior del n-gono.

V. Diferentes problemas

296. El área de un triángulo es igual a 16 cm^2, las medianas m_a y m_b son iguales a 6 y 4 cm, respectivamente. Demuestren que estas medianas son perpendiculares.

297. En el interior de un n-gono regular se toma al azar un punto. Desde él se bajan perpendiculares a los lados o sus continuaciones. Demuestren que la suma de estas perpendiculares es una magnitud constante.

298. Por el centroide del triángulo regular ABC se traza una recta paralela al lado AB. En esta recta, dentro del triángulo, se toma al azar el punto M y desde él se bajan las perpendiculares MD, ME y MF a los lados AB, AC y BC, respectivamente. Demuestren que $MD = \frac{1}{2}(ME + MF)$.

299. Demuestren que $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$, donde h_1, h_2, h_3 son las alturas del triángulo; r, el radio de la circunferencia inscrita.

300. Sea D un punto interior del lado AC en el $\triangle ABC$, r_1 y r_2, los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABD y BDC, respectivamente,

r, el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC. Demuestren que $r < r_1 + r_2$.

301. El área del cuadrilátero convexo $ABCD$ es igual a 3024 cm² y las diagonales, a 144 y 42 cm. Hallen la longitud del segmento que une los puntos medios de los lados AB y CD.

302. El área de un triángulo isósceles es igual a S y el ángulo entre las medianas, trazadas a los lados laterales, a α. Hallen la base del triángulo.

303. Los lados de un triángulo son a y b, el ángulo entre ellos γ. Hallen: a) la bisectriz l_c; b) la altura h_c.

304. La base de un triángulo es igual a a, la altura a h. Hallen la suma de los lados laterales si sabemos que el ángulo entre ellos es igual a α.

305. En un triángulo uno de los ángulos es igual a la diferencia entre los otros dos, la longitud del lado menor es igual a 1 cm y la suma de las áreas de los cuadrados, construidos en los otros dos lados, es dos veces mayor que el área del círculo circunscrito al triángulo. Hallen la longitud del lado mayor del triángulo.

306. En un triángulo son conocidos dos lados a y b ($a > b$) y el área S. Hallen el ángulo entre la altura y la mediana trazadas desde el vértice común de dos lados dados.

307. Conociendo el área S y los ángulos α, β y γ del triángulo, hallen la longitud de la altura trazada desde el vértice del ángulo α.

308. En el triángulo ABC está inscrita la circunferencia tangente al lado AB en el punto M y al lado AC en el N. Hallen el ángulo BAC y el radio de la circunferencia inscrita si $AM = 1$ cm, $BM = 6$ cm y $CN = 7$ cm.

309. El área del rectángulo $ABCD$ es igual a 48 cm² y la diagonal a 10 cm. El punto O está alejado de los vértices B y D a una distancia de 13 cm. Hallen la distancia desde el punto O hasta el vértice del rectángulo más alejado de él.

310. Los lados de un triángulo a, b y c forman una progresión aritmética creciente. Demuestren que $ac = 6Rr$, donde R y r, son los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita.

311. Las bases de un trapecio son a y b. Hallen la longitud del segmento, paralelo a las bases, contenido entre los lados laterales y que divide el trapecio en dos partes equivalentes.

312. En el trapecio $ABCD$ la base $AD = BC = 12$ cm. En la continuación de BC por el punto C se toma el punto M de forma que el área del triángulo, cortado del trapecio $ABCD$ por la recta AM, es igual a $\frac{1}{3}$ del área del trapecio. Hallen la longitud del segmento CM.

313. Desde los vértices A y C del triángulo acutángulo ABC se han bajado las alturas AD y CE. Es conocido que el área del triángulo ABC es igual a 18 cm² y la del triángulo BDE, a 2 cm². La longitud del segmento DE es igual a $2\sqrt{2}$. Calculen el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

314. Desde los vértices A y C del triángulo acutángulo ABC se bajan las alturas AD y CE. Se sabe que el área del triángulo ABC es igual a 64 cm² y la del triángulo BDE, a 16 cm². Hallen la longitud del segmento DE si el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC es igual a $16\sqrt{3}$ cm.

315. En el triángulo ABC, cuya área es igual a 6 cm², en los lados AB y AC se han tomado los puntos K y M, respectivamente, de forma que $AK : BK = 2 : 3$, $AM : CM = 5 : 3$. Las rectas CK y BM concurren en el punto P. Hallen AB si la distancia desde el punto P hasta la recta AB es igual a 1,5 cm.

316. En el triángulo isósceles ABC ($AB = BC$) se ha trazado la bisectriz AD. Hallen AC si $S_{\Delta ABD} = S_1$ y $S_{\Delta ADC} = S_2$.

317. En el triángulo ABC el punto H es el ortocentro. Hallen el segmento AH si $AB = 13$ cm, $BC = 14$ cm y $AC = 15$ cm.

318. El centro de la circunferencia inscrita en un triángulo está unido por segmentos con los vértices del triángulo. Se obtienen tres triángulos con áreas 4, 13 y 15 cm². Hallen los lados del triángulo inicial.

319. En el triángulo ABC se conoce que $BC : AC = 3$, $\angle C = \gamma$. En AB se toman los puntos D y K de forma que $\angle ACD = \angle DCK = \angle KCB$. Hallen la relación $CD : CK$.

320. En el triángulo ABC se ha trazado la mediana BD. Hallen la razón entre el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABD y el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC si $AB = 2$, $AC = 6$ y $\angle BAC = 60°$.

321. En el triángulo ABC se conoce que $AC : BC = 1 : 3$, $\angle ACB = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$. En el lado AC se ha tomado el punto D de forma que $AC = CD$. Hallen la razón entre el área del círculo circunscrito al triángulo ACD y el área del círculo inscrito en el triángulo ABD.

§ 5. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Aducimos ejemplos de aplicación de la *simetría central*, así como de la *composición de la simetría central*.

EJEMPLO 1. Por un punto que yace dentro de un círculo, trazamos una cuerda de modo que ésta se divida por la mitad con el punto dado.

SOLUCION. Construyamos una circunferencia simétrica a la prefijada con relación al punto dado. La cuerda común de estas circunferencias será la buscada.

EJEMPLO 2. Construyamos un pentágono según los puntos medios prefijados de sus lados.

SOLUCIÓN. Designemos los puntos medios de los lados del pentágono, que hemos de construir, con M, N, P, Q y K. Tomemos al azar el punto A y consideremos la composición de las simetrías centrales: $Z_K \circ Z_Q \circ Z_P \circ Z_N \circ Z_M$. ¿Qué hace esta composición con el punto A? Si designamos la composición con δ, entonces $\delta(A) = A$ (fig. 72). Sea $Z_P \circ Z_N \circ Z_M (A) = Z_S (A)$, entonces $Z_K \circ Z_Q \circ Z_S (A) = Z_A (A)$. Construyan los paralelogramos $MNPS$ y $SQKA$ y, seguidamente, la construcción del pentágono está clara.

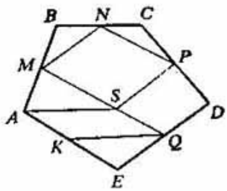


Fig. 72

Aducimos ejemplos de *simetría axial*.

EJEMPLO 3. Se dan dos circunferencias y la recta l. Construyan un triángulo equilátero de forma que dos de sus vértices pertenezcan a las circunferencias dadas y otro de los vértices, a la recta l.

SOLUCIÓN. Supongamos que el $\triangle ABC$ es el buscado (fig. 73). Como la altura AD del triángulo equilátero ABC pertenece a la recta l, los puntos B y C son simétricos con relación a dicha recta y yacen en las circunferencias dadas ω_1 y ω_2.

Como el punto C pertenece a la circunferencia ω_2 y es simétrico al punto B, perteneciente a la circunferencia ω_1, con relación a la recta l, el punto C pertenece, asimismo, a la imagen de la circunferencia ω_1 durante la simetría respecto a la recta l. Por consiguiente, el punto C es el punto común de la circunferencia ω_2 y de la imagen de la circunferencia ω_1 con la simetría S_l. De este modo, después de construir la circunferencia ω_1, simétrica a ω_1' con relación a la recta l, hallamos el punto C.

A continuación, construimos el punto B como la imagen del punto C con la simetría S_l y, después, el punto A.

Las construcciones realizadas al resolver este problema pueden realizarse en el siguiente orden: 1) construimos la imagen de la circunferencia ω_1 con la simetría S_l; 2) hallamos los puntos de intersección de las circunferencias ω_1' y ω_2; 3) hallamos en la circunferencia

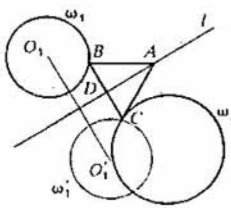


Fig. 73

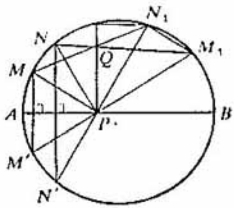


Fig. 74

ω_1 las preimágenes de los puntos de intersección de las circunferencias ω_1' y ω_2; 4) construimos el triángulo equilátero ABC, cuyo vértice A yace en la línea l.

Si las circunferencias ω_1' y ω_2 se cortan, el problema tiene 4 soluciones. Si ellas son tangentes, el problema tiene 2 soluciones. Si la circunferencia ω_1' coincide con ω_2, el problema tiene una infinita cantidad de soluciones. Si las circunferencias ω_1' y ω_2 no tienen puntos comunes, el problema no tiene solución.

EJEMPLO 4. En el diámetro AB de un semicírculo se da el punto P y en su semicircunferencia, los puntos M, M_1 y N, N_1, tales que $\angle MPA = \angle M_1PB$; $\angle NPA = \angle N_1PB$. Demostremos que el punto Q, punto de intersección de las cuerdas MN_1 y M_1N, pertenece a la perpendicular trazada al diámetro AB por el punto P.

SOLUCIÓN. Construyamos los puntos M' y N' simétricos a M y N con relación a la recta AB (fig. 74). Entonces, estará dado que los puntos M', P, M_1 yacen en una misma recta y, por analogía, los puntos N', P, N_1 pertenecen a una misma recta. Al cuadrilátero PQN_1M_1 puede circunscribirse una circunferencia y, por lo tanto, $\angle QPN_1 = \angle N_1M_1Q$ (ya que su suma es igual a 180°). A continuación, consideremos el cuadrilátero $PQMN$ que posee la misma propiedad: $\angle NPQ = \angle NMQ$. De la igualdad de los ángulos NMQ y N_1M_1Q se deduce que $\angle NPQ = \angle N_1PQ$ y que $PQ \perp AB$.

Aducimos ejemplos de la aplicación del *giro*.

EJEMPLO 5. Construyamos un triángulo equilátero uno de cuyos vértices coincide con el punto dado A y los otros dos pertenecen a dos circunferencias prefijadas.

SOLUCIÓN. Construyamos la imagen de una de las circunferencias al girar a 60° con centro de giro en el punto A. El punto de intersección de la segunda de las circunferencias prefijadas con la cirun ferencia construida es el segundo vértice del triángulo.

EJEMPLO 6. En los lados AB y BC del triángulo ABC, como sobre us bases, se construyen los cuadrados $ABMN$ y $BCQP$, orientados

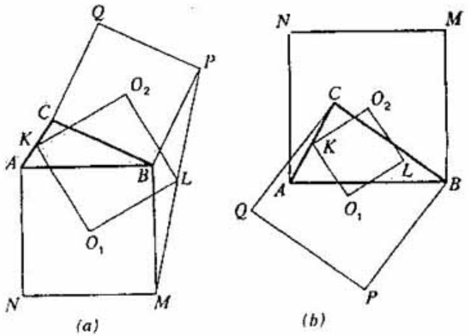


Fig. 75

del mismo modo. Designemos sus centros con O_1 y O_2, el punto medio de AC con K y el del segmento MP, con L. Demostremos que el cuadrilátero O_1LO_2K es un cuadrado.

SOLUCIÓN. Consideremos el caso cuando los cuadrados prefijados están situados en el ámbito exterior con relación al triángulo ABC. Señalemos, que la composición $R_{O_2}^{270°} \circ R_{O_1}^{270°}$ traspasa el punto A al C, por lo que $R_{O_2}^{270°} \circ R_{O_1}^{270°} = R_K^{180°}$. De aquí se desprende que el triángulo O_1O_2K es rectángulo e isósceles.

Por analogía, $R_{O_2}^{90°} \circ R_{O_1}^{90°} = R_L^{180°}$, por lo que el triángulo O_1O_2L también es rectángulo e isósceles ($\angle L = 90°$). Por lo tanto, O_1LO_2K es un cuadrado (fig. 75, *a*).

En el caso cuando los cuadrados están situados por el otro lado de AB y BC, el problema se resuelve de modo análogo (fig. 75, *b*).

Aducimos ejemplos de la aplicación de la *traslación paralela*.

EJEMPLO 7. Dos rectas paralelas p y q se cortan por una tercera recta s. Construyamos un triángulo equilátero con el lado prefijado de modo que sus vértices pertenezcan a las rectas p, q y s.

SOLUCIÓN. Del punto arbitrario A_1, mediante la recta q con un radio igual a la longitud del segmento dado tracemos una circunferencia y hallemos el punto C_1 de intersección de ésta con la recta p; construimos el triángulo equilátero $A_1B_1C_1$ (fig. 76). Por el punto B_1 trazamos la recta $h \parallel p$ y designamos con B el punto de intersección de las rectas h y s. A continuación, efectuamos la traslación paralela $\overline{v}$ del triángulo $A_1B_1C_1$, donde $\overline{v} = \overline{B_1B}$. El problema puede tener o dos soluciones, o bien ninguna.

EJEMPLO 8. Se dan las circunferencias ω_1 y ω_2 y la recta l. Tracemos una recta paralela a l, en la que las circunferencias ω_1 y ω_2 cortan iguales cuerdas.

SOLUCIÓN. Supongamos que la recta l' (fig. 77) corta en las circunferencias dadas iguales cuerdas AB y $A'B'$. Entonces, los puntos

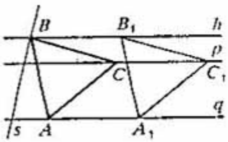


Fig. 76

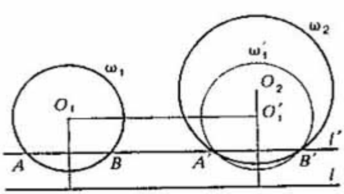


Fig. 77

A y A', B y B' pueden considerarse como los correspondientes con la traslación paralela $T_{\overline{O_1O_1'}}$, donde $\overline{O_1O_1'}$ es un vector, cuyo origen es el punto O_1, es decir, el centro de la circunferencia ω_1, en tanto que O_1' es el centro de la circunferencia ω_1'.

Como el punto A' es la imagen del punto A, perteneciente a la circunferencia ω_1, A' pertenece a la imagen de la circunferencia ω_1'. Por consiguiente, A' es un punto común de las circunferencias ω_2 y ω_1' con la traslación paralela $T_{\overline{O_1O_1'}}$.

Después de construir el punto A', en la circunferencia ω_1 hallamos su preimagen. La recta AA' será la recta l' buscada.

Si las circunferencias ω_1' y ω_2 coinciden, el problema tiene un conjunto infinito de soluciones. En todos los demás casos, el problema tiene no más de una solución.

Aducimos ejemplos de aplicación de la *homotecia*.

EJEMPLO 9. En el trapecio $ABCD$ trazamos las diagonales AC y BD que se cortan en el punto M (AB y CD son las bases del trapecio). Demostremos que las áreas de los triángulos ABM y CDM son iguales, correspondientemente, a S_2 y S_1 y que con el área S del trapecio están ligadas con la relación $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$.

SOLUCIÓN. Sea N el punto de intersección de la recta AB con la recta que pasa por el punto C, paralela a DB (fig. 78). El área del triángulo ACN es igual al área S del trapecio dado. Tracemos $BF \parallel AC$. El área del triángulo BFN es igual al área S_1 del triángulo DMC. Los triángulos AMB y BFN son homotéticos al triángulo ACN con coeficientes k_1 y k_2, con la particularidad de que $k_1 + k_2 = 1$. Pero $k_1 = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$ y $k_2 = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}$, por lo que $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$.

EJEMPLO 10. En el triángulo ABC está inscrita la circunferencia, tangente en el punto M a la recta AB. Sea que el punto M_1 es dia-

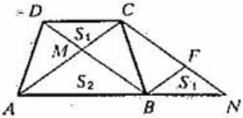


Fig. 78

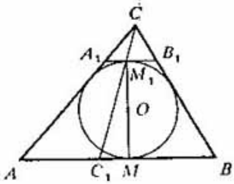


Fig. 79

metralmente opuesto al punto M en la circunferencia inscrita. Demostremos que la recta CM_1 corta la recta AB en tal punto C_1 que $AC + AC_1 = BC + BC_1$.

SOLUCIÓN. Construyamos una tangente a la circunferencia en el punto M_1 que interseca AC en el punto A_1 y BC en el punto B_1 (fig. 79). En tal caso, queda claro que $CA_1 + A_1M_1 = CB_1 + B_1M_1$. A continuación, hacemos uso de que los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son homotéticos, ya que las rectas AB y A_1B_1 son perpendiculares al diámetro MM_1 y, por lo tanto, $AB \parallel A_1B_1$.

PROBLEMAS PARA EL TRABAJO INDIVIDUAL

I. Simetría respecto a un punto

322. Están dados una recta, un segmento y el punto O. Construyan el segmento de forma que sus extremos pertenezcan a la recta y al segmento dados y que O sea su punto medio.

323. En el triángulo ABC se han trazado las medianas AA_1, BB_1 y CC_1 que se cortan en el punto M. P, Q y R son los puntos medios de los segmentos AM, BM y CM. Demuestren que el $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle PQR$.

324. Construyan un triángulo según dos de sus lados y la mediana al tercero. ¿En qué límites puede variar la longitud de la mediana si las longitudes de los lados del triángulo son a y b?

325. M, N y K son los puntos medios de los segmentos, un extremo de los cuales es el vértice del triángulo ABC y el otro, el punto de intersección de las medianas. Demuestren que el triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de las rectas que contienen los puntos M, N y K, paralelas a los respectivos lados del triángulo ABC, es igual a éste.

326. Están dados dos circunferencias y el punto P. Construyan un paralelogramo de forma que sus vértices pertenezcan a las circunferencias dadas y el punto P sea la intersección de las diagonales del paralelogramo.

327. La recta que contiene el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo $ABCD$ corta en sus lados los segmentos BE y DF. Demuestren que éstos son iguales.

328. Construyan una recta que divida un paralelogramo en dos partes equivalentes.

329. De los extremos del diámetro BC de la circunferencia con el centro en O, se han trazado dos cuerdas iguales BA y CD de forma que BA y CD no se intersecan y yacen por diferentes lados de BC. Demuestren que OA y OD pertenecen a una misma recta y que $DO = OA$.

330. A una circunferencia se circunscribe un hexágono con lados opuestos paralelos. Demuestren que estos lados del hexágono son iguales.

331. Los lados opuestos del hexágono convexo $ABCDEF$ son paralelos e iguales a pares. ¿Qué parte del área del hexágono constituye el área del triángulo ACE?

332. En una circunferencia se dan los puntos A y B y en la recta l, el punto M. Hallen en la circunferencia semejante punto X que las rectas AX y BX corten la recta l en puntos situados a iguales distancias del punto M.

333. Por el punto M del ángulo ABC, que no pertenece a sus lados, tracen una secante de modo que se obtenga un triángulo de la menor área.

334. A una circunferencia se ha circunscrito un octágono cuyos lados opuestos son paralelos a pares. Demuestren que los lados opuestos del octágono son iguales a pares.

335. Se dan el triángulo ABC y cierto punto X. Construyan el paralelogramo $BXCY$ y, a continuación, otro paralelogramo $YXAZ$. Demuestren que existe la homotecia que traslada el punto X al Z y hallen la razón de homotecia y el centro.

336. Inscriban en el cuadrilátero dado un paralelogramo a condición de que dos vértices de éste están fijados y pertenecen: a) a los lados opuestos; b) a los lados adyacentes del cuadrilátero.

337. La mediana CM del triángulo ABC forma con los lados AC y BC los ángulos α y β, respectivamente. ¿Cuál de estos ángulos es mayor si $AC < BC$?

II. Simetría respecto a una recta

338. Construyan un pentágono que tenga: a) un eje de simetría; b) más de un eje de simetría.

339. Por el punto dado tracen una recta que corte las dos rectas dadas bajo diferentes ángulos.

340. Construyan un triángulo según un lado, la diferencia de los otros dos lados y el ángulo entre el primer lado y el mayor de los otros dos.

341. Construyan un triángulo según dos lados y la diferencia entre los ángulos opuestos a ellos.

342. Dentro de un ángulo agudo se da el punto M. Construyan el triángulo MAB de perímetro mínimo, cuyos vértices A y B yacen en los lados del ángulo.

343. Construyan el cuadrilátero convexo $ABCD$ que sólo tenga un eje de simetría: la recta BD.

344. ¿Es posible construir un pentágono tal que su diagonal se encuentre en su eje de simetría? Fundamenten la solución.

345. Demuestren que en un polígono convexo con número impar de vértices y que tiene eje de simetría, ninguna de sus diagonales puede encontrarse en el eje de simetría.

346. Construyan un triángulo según el ángulo, el lado vecino y la diferencia de los otros dos lados.

347. Construyan un triángulo según la diferencia prefijada no igual a cero de sus ángulos y las longitudes de lados opuestos a dichos ángulos.

348. Se dan dos circunferencias concéntricas. Construyan un rombo diferente de un cuadrado, de forma que: a) dos vértices pertenezcan a una circunferencia y los otros dos, a otra; b) tres vértices pertenezcan a una circunferencia y uno, a otra.

349. Construyan el triángulo ABC según tres perpendiculares dadas p, q y r bajadas a los puntos medios de sus lados.

350. En la circunferencia dada inscriban un triángulo, cuyos lados son paralelos a tres rectas dadas.

351. Al triángulo ABC está circunscrita una circunferencia que interseca la bisectriz del ángulo C en el punto M. Desde el ortocentro H del triángulo se ha trazado la perpendicular HD a la bisectriz de modo que el punto D pertenece a l_c. Demuestren que $CD : CM = \cos C$.

352. En una circunferencia con centro en O está inscrito el cuadrilátero $ABCD$. Están trazados los rayos OM, ON, OP y OQ, donde M, N, P y Q son los puntos medios de las cuerdas AB, BC, CD y DA. Demuestren que $\angle MON + \angle COD = 180°$ o bien $\angle MON = \angle POQ$.

353. A la circunferencia con centro en O está circunscrito el cuadrilátero $ABCD$. Demuestren que $\angle AOB + \angle COD = 180°$.

354. En la circunferencia dada inscriban un pentágono, cuyos lados sean paralelos a cinco rectas dadas.

355. Sobre una mesa de billar de forma rectangular yace una bola. ¿En qué dirección es preciso impulsar la bola para que después de reflejarse de todos los cantos, ella pase por su posición inicial?

356. Demuestren que el punto de intersección de las rectas que contienen los lados laterales de un trapecio isósceles, el punto de intersección de sus diagonales y los puntos medios de las bases del trapecio pertenecen a una misma recta.

357. Demuestren que la recta que contiene los puntos medios de dos cuerdas paralelas de una circunferencia pasa por su centro.

358. La circunferencia F_1 corta las circunferencias concéntricas F_2 y F_3 en los puntos A, B y C, D, respectivamente. Demuestren que las cuerdas AB y CD son paralelas.

359. Tres circunferencias iguales tienen un punto común. Demuestren que la circunferencia trazada por los segundos puntos de intersección de las tres circunferencias dadas es igual a las primeras.

360. En un plano se dan cuatro circunferencias iguales que pasan por un punto y se cortan, por segunda vez, en seis puntos. Demuestren que cuatro circunferencias, que pasan por cada tres de esos seis puntos, tomando un punto en cada una de las circunferencias dadas, se cortan en un mismo punto.

361. En un plano se dan una recta y un punto que no yace en ella. Hallen el lugar geométrico de los centros de triángulos regulares, en los que uno de los vértices se halla en el punto dado y otro, en la recta dada.

362. En un plano se dan una recta y un punto que no pertenece a ella. Hallen el lugar geométrico de los terceros vértices de triángulos regulares, en los que un vértice se halla en el punto dado y el otro, en la recta dada.

III. Giro

363. Construyan el cuadrado $ABCD$ según su centro O y los puntos M y N que pertenecen a las rectas AB y BC, respectivamente, $OM \neq ON$.

364. Construyan un triángulo equilátero tal que uno de sus vértices coincida con el punto dado O, mientras que los otros dos pertenezcan a dos circunferencias dadas.

365. Por el punto dado en el interior de una circunferencia trazar una cuerda de la longitud prefijada.

366. En los lados BC, CA y AB del triángulo equilátero ABC están dados los puntos M, N y P, respectivamente. Se conoce que $BM : MC = CN : NA = AP : PB = k$. a) Demuestren que MNP es un triángulo equilátero. b) Calculen MN si $BC = a$, $k = 2$.

367. En los lados BC, CD, DA y AB del cuadrado $ABCD$ se dan los puntos P, Q, R y S, respectivamente. Es conocido que $BP : PC = CQ : QD = DR : RA = AS : SB = h$. a) Demuestren que $PQRS$ es un cuadrado. b) Calculen PQ si $AB = a$, $h = 3$.

368. En los lados AB y BC del triángulo ABC, como sobre sus bases, se han construido los cuadrados $ABMN$ y $BCOP$ orientados en un mismo sentido. Designemos sus centros con O_1 y O_2, el punto medio del lado AC, con K; el punto medio del segmento MP, con L. Demuestren que el cuadrilátero O_1LO_2K es un cuadrado.

369. En los lados AC y BC del triángulo ABC, fuera de él, se han construido los triángulos equiláteros ACB_1 y BCA_1. Hallen los ángulos del triángulo MA_1O, donde M es el punto medio del lado AB, el punto O, el centro del triángulo ACB_1.

370. En la continuación de los lados del triángulo rectángulo ABC se han marcado los segmentos AD y AE, iguales a los catetos AB y AC, respectivamente, del triángulo ABC. Demuestren que la recta que contiene la mediana AM del triángulo ABC es perpendicular al segmento DE.

371. Está dado el cuadrado $ABCD$. Por el centro de éste se han trazado dos rectas perpendiculares entre sí, diferentes de las rectas AC y BD. Demuestren que las figuras, formadas por la intersección de estas rectas con el cuadrado, son iguales.

372. Por el centro O del triángulo regular ABC se han trazado dos rectas que crean entre sí un ángulo de 60°. Demuestren que los segmentos de estas rectas, situados dentro del triángulo, son iguales.

373. Construyan un triángulo equilátero de forma que uno de sus vértices sea el punto P, el segundo pertenezca a la recta a, el tercero, a la recta b.

374. En los lados AB y AC del triángulo ABC, pero fuera de él, se han construido los cuadrados $ABNM$ y $ACQP$. Demuestren que $MC \perp BP$.

375. Están dados dos cuadrados $MPOR$ y $MUVW$ orientados en un mismo sentido. Demuestren que los segmentos PU y RW son iguales y perpendiculares.

376. En los lados AB y BC del triángulo ABC se han construido cuadrados con los centros D y E, con la particularidad de que los puntos C y D están situados por un lado de AB, en tanto que los puntos A y E, por diferentes lados de BC. Demuestren que el ángulo entre las rectas AC y DE es igual a 45°.

377. Construyan el cuadrado $ABCD$ según su centro O y dos puntos M y N que pertenecen a las rectas BC y CD, $OM \neq ON$.

IV. Traslación paralela

378. Se dan cuatro diferentes puntos A, B, C y D. Trazar por ellos cuatro rectas paralelas a, b, c y d, respectivamente, de forma que la anchura de las bandas entre las rectas a y b sea igual a la anchura entre las rectas c y d.

379. Construyan un trapecio según sus diagonales, el ángulo entre ellas y uno de los lados.

380. Demuestren que si una recta que pasa por el punto medio de las bases de un trapecio forma iguales ángulos con las rectas que contienen sus lados laterales, el trapecio es isósceles.

381. Dos circunferencias iguales son tangentes exteriores en el punto K. La secante paralela a la línea de los centros corta, consecutivamente, la circunferencia en los puntos A, B, C y D. Demuestren que el valor del ángulo AKC no depende de la elección de la secante.

382. Determinen el área de un trapecio si todos sus lados son conocidos.

383. En una circunferencia con centro en O se dan tres puntos A, B y C tales que $\angle AOB = \angle BOC = 60°$. Demuestren que la distancia desde el punto B hasta un diámetro tomado al azar de la circunferencia es igual bien a la suma, o bien al valor absoluto de la diferencia de la distancia desde los puntos A y C hasta dicho diámetro.

384. Por el punto M, que yace fuera de la circunferencia ω, tracen la recta m que corta ω en dos puntos A y B de forma que $AB = BM$.

385. Cuatro circunferencias iguales ω_1, ω_2, ω_3 y ω_4 pasan por el punto M y de nuevo se cortan en seis puntos: A_{12} es el punto de intersección de ω_1 y ω_2; A_{23}, de ω_2 y ω_3, etc.; A_{43} corresponde a ω_4 y ω_3. Demuestren que los segmentos $A_{12}A_{43}$, $A_{23}A_{14}$, $A_{13}A_{24}$ tienen punto medio común.

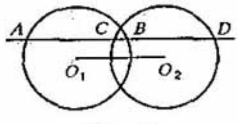


Fig. 80

386. Las rectas a las que pertenecen los lados laterales de un trapecio son perpendiculares. Demuestren que la longitud del segmento, cuyos extremos son los puntos medios de las bases del trapecio, es igual a la semidiferencia de las longitudes de las bases.

387. La suma de las longitudes de las bases de un trapecio es igual a 21 cm, en tanto que las longitudes de las diagonales son iguales a 13 y 20 cm. Calculen el área del trapecio.

388. La distancia entre los centros de dos circunferencias, de iguales radios, que se cortan es igual a d. Una recta paralela a la línea de los centros corta la primera circunferencia en los puntos A y B y la segunda, en C y D. Hallen la longitud del segmento AC (fig. 80).

389. Construyan el cuadrilátero $ABCD$ conociendo la longitud de sus lados y la del segmento MN que une los puntos medios de los lados AB y DC.

390. Las diagonales de un trapecio con bases a y b son perpendiculares entre sí. ¿Qué valores puede tomar la altura del trapecio?

V. Homotecia

391. Demuestren que en el triángulo arbitrario ABC el punto M de intersección de las medianas, el punto H de intersección de las alturas y el centro O de la circunferencia circunscrita, pertenecen a una misma recta (recta de Euler) y que $\frac{OM}{MH} = \frac{1}{2}$.

392. Se da el ángulo ABC y en su interior el punto M. Tracen por éste una recta de forma que su segmento, contenido dentro del ángulo ABC, se divida por el punto M en la razón $1:2$.

393. Por el punto de tangencia M de las circunferencias ω y ω_1 se han trazado las secantes h y l que cortan la circunferencia ω, además del punto M, en los puntos A y B y la circunferencia ω_1 en los puntos C y D. Demuestren que las rectas AB y CD son paralelas.

394. Demuestren que si por el punto de tangencia de dos circunferencias se traza un recta arbitraria, ella corta las circunferencias por segunda vez en tales puntos que los radios trazados desde ellos son paralelos.

395. Se dan tres segmentos paralelos MN, PQ y RS, diferentes a pares, con la particularidad de que los rayos MN, PQ y RS son codirigidos. Demuestren que los tres puntos de intersección de los pares de rectas MP y NQ, MR y NS, PR y QS pertenecen a una recta; los puntos de intersección de los pares de rectas MQ y NP, QR y PS, MP y NS también pertenecen a una misma recta (fig. 81).

396. Las circunferencias ω_1 y ω_2 tienen tangencia interior en el punto A (fig. 82). La secante a corta ω_1 en los puntos M y N y ω_2 en los puntos P y Q. Demuestren que $\angle PAM = \angle QAN$.

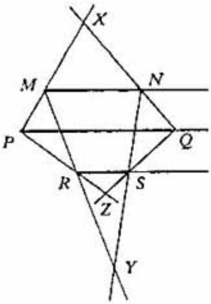


Fig. 81

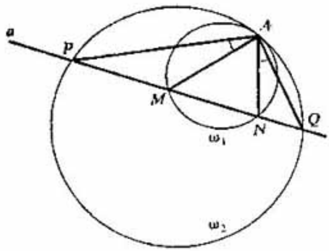


Fig. 82

397. Las longitudes de los segmentos, uno de cuyos extremos es un punto común y el otro, el punto de una recta, están divididas en una misma razón. Demuestren que los puntos de división pertenecen a una línea.

§ 6. VECTORES

Suma de vectores. Recibe el nombre de suma de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ con coordenadas a_1, a_2 y b_1, b_2 el vector $\bar{c}$ con coordenadas $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, es decir, $\bar{a}(a_1, a_2) + \bar{b}(b_1, b_2) = \bar{c}(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Para cualesquiera vectores $\bar{a}(a_1, a_2)$, $\bar{b}(b_1, b_2)$, $\bar{c}(c_1, c_2)$ $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$, $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$.

Regla del triángulo. Para cualesquiera tres puntos A, B y C es válida la igualdad $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Regla del paralelogramo. Si $ABCD$ es un paralelogramo, $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$.

Multiplicación de un vector por un número. Recibe el nombre de producto del vector $\overline{(a_1, a_2)}$ por el número λ el vector $\overline{(\lambda a_1 \lambda a_2)}$, es decir $\overline{(a_1, a_2)}\,\lambda = \overline{(\lambda a_1, \lambda a_2)}$. Por definición, $\overline{(a_1, a_2)}\,\lambda = \lambda\,\overline{(a_1, a_2)}$.

Para cualquier vector $\bar{a}$ y los números λ y μ, $(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$.

Para cualesquiera vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ y números λ $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$; $|\lambda\bar{a}| = |\lambda|\,|\bar{a}|$.

El sentido del vector $\lambda\bar{a}$, con $\bar{a} \neq \bar{0}$, coincide con el sentido del vector $\bar{a}$ si $\lambda > 0$ y es opuesto al sentido del vector $\bar{a}$ si $\lambda < 0$.

Dos vectores no nulos llevan el nombre de *colineales* si ellos yacen en una misma recta o en las rectas paralelas.

Si $\overline{a}(a_1, a_2) \parallel \overline{b}(b_1, b_2)$, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$. También es cierta la afirmación inversa.

Un vector se denomina *unitario* si su valor absoluto es igual a la unidad. Los vectores unitarios que tienen el sentido de los semiejes positivos de coordenadas, reciben el nombre de vectores coordenados o versores y se designan $\overline{e_1}$ (1, 0) en el eje Ox y $\overline{e_2}$ (0, 1) en el eje Oy.

Todo vector $\overline{a}$ (a_1, a_2) tolera su representación en la forma $\overline{a} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2}$.

Producto escalar de vectores. Recibe el nombre de producto escalar de los vectores $\overline{a}$ (a_1, a_2) y $\overline{b}$ (b_1, b_2) el número $a_1b_1 + a_2b_2$.

$\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}^2$, $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$.

Para cualesquiera tres vectores $\overline{a}$ (a_1, a_2), $\overline{b}$ (b_1, b_2) y $\overline{c}$ (c_1, c_2), $(\overline{a} + \overline{b})\,\overline{c} = \overline{ac} + \overline{bc}$.

Se llama *ángulo entre los vectores no nulos* $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ el ángulo BAC. Recibe el nombre de ángulo entre los vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$ el ángulo entre vectores iguales a ellos con origen común. El ángulo entre vectores de un mismo sentido se considera nulo.

El producto escalar de vectores es igual al producto de sus valores absolutos por el coseno del ángulo entre ellos.

Si $\overline{a} \perp \overline{b}$, $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$ y si $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$, donde $\overline{a} \neq 0$, $\overline{b} \neq 0$, $\overline{a} \perp \overline{b}$.

El aparato del álgebra vectorial ha permitido crear un método singular para resolver diversos problemas geométricos. No obstante, hay que tener en cuenta que dicho método no es universal, para resolver ciertos problemas no puede ser empleado o es poco eficaz. En la siguiente tabla se aducen ejemplos de empleo del lenguaje vectorial para enunciar y demostrar algunas afirmaciones geométricas o bien para calcular magnitudes geométricas.

Las aplicaciones concretas en los tres primeros casos pueden ser observadas por el lector al considerar los problemas afines y en los últimos tres, al examinar problemas métricos.

I. Problemas afines

Destaquemos varios tipos de problemas afines que es conveniente resolver empleando vectores. (Sólo se trata de aquellos problemas, en cuyo texto no hay ningún concepto de álgebra vectorial.)

Al *primer tipo* se refieren los problemas ligados con la demostración del paralelismo de ciertos segmentos y rectas. En los problemas de este tipo, para resolverlos, es preciso demostrar la colinealidad de los vectores representados por ciertos segmentos dados, es decir,

Qué hay que demostrar (en lenguaje geométrico)	Qué es suficiente demostrar (en lenguaje vectorial)
1) $a \parallel b$	$\overline{AB} = k\overline{CD}$, donde los segmentos AB y CD pertenecen a las rectas a y b, respectivamente, k es un número. En función de la elección de AB y CD surgen diversas relaciones vectoriales entre las que se eligen las convenientes.
2) Los puntos A, B y C pertenecen a la recta a	a) establecer la justeza de una de las siguientes igualdades: $\overline{AB} = k\overline{BC}$ o $\overline{AC} = k\overline{BC}$, o bien $\overline{AC} = k\overline{AB}$; b) demostrar la igualdad $\overline{QC} = p\overline{QA} + q\overline{QB}$, donde $p + q = 1$ y Q es un punto arbitrario; c) demostrar la igualdad $\alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB} + \gamma\overline{AC} = 0$, donde $\alpha + \beta + \gamma = 0$ y Q es un punto arbitrario
3) El punto C pertenece al segmento AB, donde $AC : AB = m : n$ (división del segmento en la razón dada)	$\overline{AC} = m/n\overline{CB}$ o $\overline{QC} = \frac{n}{m+n}\overline{QA} + \frac{m}{m+n}\overline{QB}$ para cierto punto Q.
4) $a \perp b$	$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$, donde los puntos A y B pertenecen a la recta a y los puntos C y D, a la recta b.
5) Cálculo de la longitud de un segmento	a) se eligen dos vectores no colineales básicos (o bien tres no complanares), en los que son conocidas las longitudes y el ángulo entre ellos; b) por ellos se descompone el vector, cuya longitud se calcula; c) se halla el cuadrado escalar de este vector empleando la fórmula $\overline{a}^2 = \lvert \overline{a} \rvert^2$.
6) Cálculo del valor del ángulo	a) se eligen dos vectores no colineales básicos para los que se conocen la razón de las longitudes y los ángulos entre ellos; b) se eligen los vectores que prefijan el ángulo buscado y se descomponen por los vectores básicos: c) se calcula $\cos \angle (\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\lvert \overline{a} \rvert \lvert \overline{b} \rvert}$.

demostrar que $\overline{a} = k\overline{b}$, donde k es cierto número. Examinemos la resolución de los problemas del primer tipo en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1. En el plano están dados el cuadrilátero $ABCD$ y el punto M. Demostremos que los puntos simétricos a M con relación a los puntos medios de los lados del cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.

SOLUCIÓN. Sea $ABCD$ el cuadrilátero dado (fig. 83), N, P, Q y R, puntos simétricos a M con relación a los segmentos AB, BC, CD y DA.

Según la regla del paralelogramo, tenemos: $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{MB}$, $\overline{MP} = \overline{MB} + \overline{MC}$, $\overline{MQ} = \overline{MC} + \overline{MD}$, $\overline{MR} = \overline{MD} + \overline{MA}$.

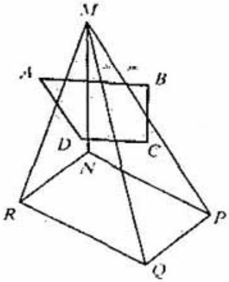


Fig. 83

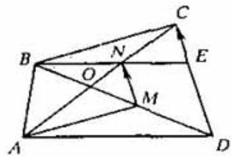


Fig. 84

Por definición la diferencia de los vectores $\overline{NR} = \overline{MR} - \overline{MN}$ y $\overline{PQ} = \overline{MQ} - \overline{MP}$.

Como $\overline{NR} - \overline{PQ} = (\overline{MR} - \overline{MN}) - (\overline{MQ} - \overline{MP})$, haciendo uso de las igualdades iniciales nos cercioramos de que $\overline{NR} - \overline{PQ} = \overline{0}$, es decir, $\overline{NR} = \overline{PQ}$. Por analogía, se demuestra que $\overline{NP} = \overline{RQ}$. Por consiguiente, $\overline{NR} = \overline{PQ}$ y $\overline{NP} = \overline{RQ}$, lo que significa que el cuadrilátero $NPQR$ es un paralelogramo.

EJEMPLO 2. Se da el cuadrilátero $ABCD$. La recta trazada por el vértice A paralela al lado BC corta la diagonal BD en el punto M, mientras que la recta trazada por el vértice B paralela al lado AD corta la diagonal AC en el punto N. Demuestren que $MN \parallel DC$.

SOLUCIÓN. Para resolver el problema es suficiente demostrar la colinealidad de los vectores $\overline{DC}$ y $\overline{MN}$ (fig. 84), o sea, hay que demostrar que $\overline{DC} = k\overline{MN}$, donde k es cierto número. Para cerciorarse de la colinealidad de los vectores $\overline{DC}$ y $\overline{MN}$ expresemos cada uno de ellos con ayuda de otros vectores. Así, el vector $\overline{DC}$ se expresa con los vectores $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ y el vector $\overline{MN}$, con los vectores $\overline{OM}$ y $\overline{ON}$, donde

O es el punto de intersección de las rectas AC y BD. A continuación, los vectores $\overline{OC}$ y $\overline{ON}$ pueden ser expresados con el vector $\overline{AO}$, los vectores $\overline{OD}$ y $\overline{OM}$, con el vector $\overline{BO}$. Supongamos que

$$AO : OC = p : q \text{ y } BO : OD = m : n. \tag{1}$$

Entonces podemos expresar el vector $\overline{DC}$ con $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$ mediante las sustituciones sucesivas: $\overline{DC} = \overline{OC} - \overline{OD} = \frac{q}{p}\overline{AO} - \frac{n}{m}\overline{BO} = \frac{1}{mp}(mq\overline{AO} - np\overline{BO})$.

Por otro lado, del paralelismo de los segmentos BE y AD, se desprende que

$$AO : ON = DO : OB = n : m. \tag{2}$$

Entonces, de acuerdo con la figura y de la igualdad (2), se desprende que $\overline{ON} = \frac{m}{n}\overline{AO}$. Por analogía, del paralelismo de los segmentos AM y BC se deduce que $BO : OM = CO : AO = q : p$ y $\overline{OM} = \frac{p}{q}\overline{BO}$. En tal caso, es posible expresar el vector $\overline{MN}$ con $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$ mediante las sustituciones sucesivas: $\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} = \frac{p}{q}\overline{BO} + \frac{m}{n}\overline{AO} = \frac{1}{nq}(-np\overline{BO} + mq\overline{AO})$. De donde, $\overline{DC} = \frac{nq}{mp}\overline{MN}$, lo que, al pasar al lenguaje geométrico, significa el paralelismo de los segmentos MN y DC.

Al *segundo tipo* se refieren los problemas relacionados con la demostración de que el punto dado divide un segmento en una determinada razón (en particular, es su punto medio).

Con el fin de demostrar que punto C divide el segmento AB en cierta razón $AC : CB = m : n$, es suficiente: a) demostrar la igualdad $\overline{AC} = \frac{m}{n}\overline{CB}$ o bien *b*) demostrar la igualdad $\overline{QC} = \frac{n}{n+m}\overline{QA} + \frac{m}{n+m}\overline{QB}$, donde Q es un punto arbitrario.

La demostración de la suficiencia de la condición expuesta en el punto b) es sencilla. Sea $\overline{QC} = \frac{n}{m+n}\overline{QA} + \frac{m}{m+n}\overline{QB}$, entonces $\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\overline{QC} = \frac{1}{m}\overline{QA} + \frac{1}{n}\overline{QB}$, $\frac{1}{m}(\overline{QC} - \overline{QA}) = \frac{1}{n}(\overline{QB} - \overline{QC})$, $\frac{1}{m}\overline{AC} = \frac{1}{n}\overline{CB}$, lo que significa que $AC : CB = \frac{m}{n}$.

Señalemos, además, que al realizar la demostración en el orden inverso, podemos asimismo cerciorarnos en la necesidad de la condición b) para dividir el segmento AB con el punto C en la razón $m : n$.

Resolvamos varios problemas del segundo tipo.

EJEMPLO 3. El segmento que une los puntos medios de las diagonales de un cuadrilátero arbitrario pasa por el punto de intersección de las líneas medias. Demostremos que el mencionado segmento se divide por la mitad.

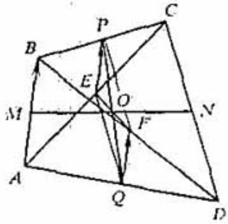


Fig. 85

SOLUCIÓN. El hecho de que O (fig. 85) es el punto medio del segmento EF puede ser demostrado de distinta forma.

P.ej.:

1) demostrar que $\overline{EP} = \overline{QF}$, lo que significa que $EPFQ$ es un paralelogramo y como EF es su diagonal, ella pasa por el punto O y éste la divide por la mitad;

2) demostrar que $\overline{EO} = \overline{OF}$;

3) demostrar que $\overline{QO} = \frac{1}{2}(\overline{QE} + \overline{QF})$ o bien $\overline{NO} = \frac{1}{2}(\overline{NE} + \overline{NF})$;

4) demostrar que $\overline{CO} = \frac{1}{2}(\overline{CE} + \overline{CF})$ o bien $\overline{DO} = \frac{1}{2}(\overline{DE} + \overline{DF})$.

Consideremos el primer procedimiento de la demostración que, en el caso dado, es el más sencillo.

En el triángulo ABC el segmento EP es la línea media, de donde $\overline{EP} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. En el triángulo ABD el segmento QF es la línea media, de donde $\overline{QF} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Esto quiere decir que $\overline{EP} = \overline{QF}$. El problema está resuelto.

EJEMPLO 4. En el paralelogramo $ABCD$ el lado AD está dividido en n partes iguales y el primer punto de división (el K) se une con el vértice B (fig. 86). Hallemos en qué partes divide la semirrecta BK la diagonal AC.

SOLUCIÓN. Sea $\overline{DC} = \overline{b}$, $\overline{DA} = \overline{a}$ y $\overline{AP} = \alpha\overline{AC}$. Expresemos el vector $\overline{AP}$ con los vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$, haciendo uso de dos procedimientos: 1) $\overline{AP} = \alpha\overline{AC} = \alpha(\overline{b} - \overline{a}) = \alpha\overline{b} - \alpha\overline{a}$; 2) $\overline{AP} = \overline{AK} + \overline{KP} = -\frac{1}{n}\overline{a} +$ $+ \alpha\overline{KB} = -\frac{1}{n}\overline{a} + \alpha\left(\frac{1}{n}\overline{a} + \overline{b}\right) = \frac{\alpha - 1}{n}\overline{a} + \alpha\overline{b}$ ($\overline{KP} = \alpha\overline{KB}$, ya que el $\triangle APK \backsim \triangle BPC$).

Como sólo es posible la única representación del vector mediante dos vectores no colineales, $\frac{\alpha - 1}{n} = -\alpha$, de donde $\alpha = \frac{1}{n+1}$. Esto significa que $\overline{AP} = \frac{1}{n+1}\overline{AC}$ y, entonces, como es fácil cerciorarse, $AP : PC = 1 : n$.

EJEMPLO 5. En el lado AC del triángulo ABC se ha tomado el punto M de forma que $AM = \frac{1}{3}AC$ y en la continuación del lado BC, tal punto N que $BN = CB$. Hallemos en qué razón divide los segmentos AB y MN el punto P de su intersección.

SOLUCIÓN (fig. 87). Supongamos que

$$NP : PM = \alpha : \beta, \quad AP : PB = \gamma : \delta. \tag{1}$$

Así, pues, es preciso hallar $\alpha : \beta$ y $\gamma : \delta$. Con este objeto, confeccionemos varias ecuaciones que contengan α, β, γ y δ.

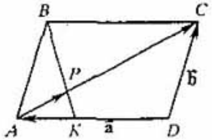


Fig. 86

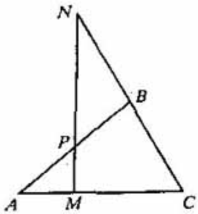


Fig. 87

Dos ecuaciones semejantes se pueden escribir empleando el teorema acerca de la división de un segmento en la razón dada;

Sea Q un punto arbitrario en el plano, entonces para los segmentos AB y MN, tenemos:

$$\overline{QP} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overline{QN} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overline{QM}, \tag{2}$$

$$\overline{QP} = \frac{\delta}{\gamma+\delta}\overline{QA} + \frac{\gamma}{\gamma+\delta}\overline{QB}. \tag{3}$$

Las igualdades (2) y (3) que hemos escrito contienen cinco vectores diferentes. Disminuyamos su cantidad sustituyendo los vectores que tenemos por otros, haciendo de nuevo uso del teorema acerca de la división de un segmento en la razón dada. Para los segmentos NC y AC, tendremos: $\overline{QB} = \frac{1}{2}(\overline{QN} + \overline{QC})$,

$$\overline{QM} = \frac{2}{3}\overline{QA} + \frac{1}{3}\overline{QC}. \tag{4}$$

Poniendo en las igualdades (2) y (3) los valores de $\overline{QB}$ y $\overline{QM}$ de (4), obtenemos:

$$\overline{QP} = \frac{\delta}{\gamma+\delta}\overline{QA} + \frac{\gamma}{2(\gamma+\delta)}\overline{QN} + \frac{\gamma}{2(\gamma-\delta)}\overline{QC}, \tag{5}$$

$$\overline{QP} = \frac{2\alpha}{3(\alpha+\beta)}\overline{QA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overline{QN} + \frac{\alpha}{3(\alpha+\beta)}\overline{QC}. \tag{6}$$

De aquí, tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{\gamma}{2(\gamma+\beta)}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}, \\ \dfrac{\delta}{\gamma+\delta}=\dfrac{2\alpha}{3\alpha+\beta}, \\ \dfrac{\gamma}{2(\gamma+\delta)}=\dfrac{\alpha}{3(\alpha+\beta)}. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos: $\gamma=\delta$ y $\beta=\frac{1}{3}\alpha$. Así, pues, $AP=BP$ y $NP:PM=3:1$.

Analicemos los problemas del *tercer tipo*. Refiramos a este tipo tales problemas en los que se requiere demostrar la pertenencia de tres puntos a una misma recta. Estos problemas podrían ser considerados como un caso particular del segundo tipo. No obstante, en su resolución hay cierto carácter específico debido al empleo de la condición de pertenencia de tres puntos a una misma recta.

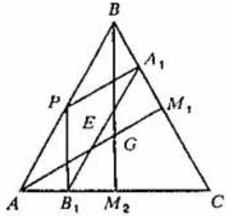


Fig. 88

EJEMPLO 6. En el lado AB del triángulo ABC se da el punto P por el que se han trazado rectas paralelas a sus medianas AM_1 y BM_2 y que cortan los correspondientes lados del triángulo en los puntos A_1 y B_1. Demostremos que E es el punto medio del segmento A_1B_1, así como que el punto P y el punto G de intersección de las medianas del triángulo dado yacen en una misma recta.

SOLUCIÓN. Variemos la conclusión del problema de forma que, para su resolución podamos emplear vectores. Esto es posible de realizar con los siguientes procedimientos (fig. 88):

1) Establezcamos que $\overline{EP}=k\overline{GP}$ (se pueden tomar también otros vectores).

2) Para cierto punto Q establezcamos que $\overline{QE}=k\overline{QP}+(1-k)\times\times\overline{QC}$ (condición de pertenencia de tres puntos a una recta).

La primera vía de resolución ya es conocida de los ejemplos, aducidos más arriba, para resolver los problemas del primer tipo.

Analicemos la segunda vía. Con este fin, deduzcamos, primeramente, la condición de pertenencia de tres puntos a una recta.

Para que los puntos A, B y C pertenezcan a una recta es necesario y suficiente que para cierto punto Q se cumpla la igualdad $\overline{QC}=p\overline{QA}+q\overline{QB}$, donde $p+q=1$.

DEMOSTRACIÓN. Sea que los puntos A, B y C pertenecen a una misma recta. Entonces es posible escribir: $AC:CB=m:n$. Esto manifiesta la certeza de las siguientes igualdades: $AC : CB = m : n$, de donde $\overline{QC} = \frac{m}{m+n}\overline{QA} + \frac{n}{m+n}\overline{QB}$, $\overline{QC} = p\overline{QA} + q\overline{QB}$, $p + q = 1$.

Los razonamientos realizados aquí demuestran la necesidad y la suficiencia de la condición.

La resolución de este problema se reduce, por decirlo así, a establecer la dependencia entre los vectores $\overline{QP}$, $\overline{QE}$ y $\overline{QG}$. Si el punto Q se toma al azar, la resolución del problema será muy complicada. Es mejor tomarlo de forma que coincida con el punto C. Con ello, los vectores $\overline{CP}$, $\overline{CE}$, $\overline{CG}$ son expresados con facilidad mediante $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$. En efecto, sea

$$AP : PB = m : n. \tag{1}$$

Entonces

$$AB_1 : B_1C = m : (m + n + n) = m : (2n + m) \tag{2}$$

(ya que M_2 es el punto medio de AC) y

$$BA_1 : A_1C = n : (m + m + n) = n : (2m + n) \tag{3}$$

(ya que M_1 es el punto medio de BC). De la propiedad del centro de gravedad G se desprende: $\overline{CG} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB}) = \frac{1}{3}(\overline{CA} + \overline{CB})$. De las relaciones (2) y (3) es posible escribir: $\overline{CB}_1 = \frac{2n+m}{2(m+n)}\overline{CA}_1$, $\overline{CA}_1 = \frac{2m+n}{2(m+n)}\overline{CB}_1$. Entonces, partiendo de la propiedad del punto medio E del segmento A_1B_1, podemos escribir:

$$\overline{CE} = \frac{1}{2}(\overline{CB}_1 + \overline{CA}_1) = \frac{1}{4}\left(\frac{2n+m}{m+n}\overline{CA} + \frac{n+2m}{m+n}\overline{CB}\right).$$

Según el teorema acerca de la división de un segmento en la razón dada, tenemos: $\overline{CP} = \frac{n}{m+n}\overline{CA} + \frac{m}{m+n}\overline{CB}$.

Con el fin de enlazar los vectores $\overline{CG}$, $\overline{CE}$ y $\overline{CP}$, transformemos el vector $\overline{CE}$: $\overline{CE} = \frac{1}{4}\left(\frac{m+2n}{m+n}\overline{CA} + \frac{2m+n}{m+n}\overline{CB}\right) = \frac{1}{4}\left(\overline{CA} + \overline{CB} + \frac{n}{m+n}\overline{CA} + \frac{m}{m+n}\overline{CB}\right) = \frac{1}{4}(3\overline{CG} + \overline{CP}) = \frac{3}{4}\overline{CG} + \frac{1}{4}\overline{CP}$, es decir $\overline{CE} = \frac{3}{4}\overline{CG} + \frac{1}{4}\overline{CP}$, pero como $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, los puntos E, G y P pertenecen a una misma recta y $EG : PE = 1 : 3$. El problema queda resuelto.

Los tipos considerados de problemas afines en el plano no agotan la gran diversidad de éstos. Pero ellos forman los grupos más numerosos de problemas, lo que justifica su especial examen.

II. Problemas métricos

Al resolver los problemas métricos se hace uso del producto escalar de los vectores. Sin clasificarlos en tipos, vamos a dar varios ejemplos.

EJEMPLO 7. En la base AB del triángulo isósceles ABC se da el punto P. a) Demostremos que $PC^2 = AC^2 - AP \cdot BP$. b) Aclaremos cómo varía esta fórmula si el punto P yace en la continuación de la base AB.

SOLUCIÓN. a) Escribamos la igualdad a demostrar en forma vectorial. Tomando en consideración el sentido de los vectores $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ (fig. 89), obtenemos: $\overline{PC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AP} \cdot \overline{BP}$. Demostremos esta igualdad. Transformemos su segundo miembro de la forma siguiente:

$$\overline{AC}^2 - \overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{AC}^2 - (\overline{AC} + \overline{CP}) \cdot (\overline{PC} + \overline{CB}) = \overline{AC}^2 -$$

$$- \overline{AC} \cdot \overline{PC} - \overline{AC} \cdot \overline{CB} + \overline{CP}^2 - \overline{CP} \cdot \overline{CB} = (\overline{AC}^2 - \overline{AC} \cdot \overline{PC}) -$$

$$- (\overline{AC} \cdot \overline{CB} + \overline{CP} \cdot \overline{CB}) + \overline{CP}^2 = \overline{AC}\,(\overline{AC} - \overline{PC}) - \overline{CB}\,(\overline{AC} +$$

$$+ \overline{CP}) + \overline{CP}^2 = (\overline{AC} + \overline{CP}) \cdot (\overline{AC} - \overline{CB}) + \overline{CP}^2 = \overline{AP}\,(\overline{AC} -$$

$$- \overline{CB}) + \overline{CP}^2.$$

Si ahora el vector $\overline{CB'} = \overline{AC}$, $\overline{AC} - \overline{CB} = \overline{CB'} - \overline{CB} = \overline{BB'}$. El triángulo $AB'B$ es rectángulo y, por lo tanto, $\overline{AP}\,(\overline{AC} - \overline{CB}) = \overline{AP} \cdot \overline{BB'} = 0$. De forma que $\overline{AC}^2 - \overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP}^2$.

b) Si el punto P pertenece al segmento AB, al pasar de la igualdad vectorial a la escalar, tendremos: $\overline{PC}^2 = |\overline{PC}|^2 = PC^2$, $\overline{AC}^2 = |\overline{AC}|^2 = AC^2$, $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = |\overline{AP}| \cdot |\overline{PB}| \cdot \cos \angle (\overline{AP}, \overline{PB}) = AP \cdot PB \cdot \cos 0° = AP \cdot PB$, es decir, $PC^2 = AC^2 - AP \cdot PB$.

Pero si el punto P no pertenece al segmento AB, los vectores $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ tienen sentido opuesto y $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = |AP| \cdot |PB| \cdot \cos 180° = -AP \cdot PB$. Así, pues, en este caso, la igualdad buscada tiene la forma: $PC^2 = AC^2 + AP \cdot PB$.

EJEMPLO 8. Hallemos la suma de los cuadrados de las medianas de un triángulo si conocemos sus lados a, b y c.

SOLUCIÓN. Sea que en el $\triangle ABC$ $\overline{AB} = \bar{c}$, $\overline{BC} = \bar{a}$, $\overline{CA} = \bar{b}$ (fig. 90). Entonces, por definición, la suma de los vectores $\overline{AD} = \bar{c} + \frac{\bar{a}}{2}$, $\overline{BE} = \bar{a} + \frac{\bar{b}}{2}$, $\overline{CF} = \bar{b} + \frac{\bar{c}}{2}$.

Utilizando la propiedad del cuadrado escalar, obtenemos:

$$\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2=\left(\bar{c}+\frac{\bar{a}}{2}\right)^2+\left(\bar{a}+\frac{\bar{b}}{2}\right)^2+\left(\bar{b}+\frac{\bar{c}}{2}\right)^2=$$

$$=\bar{c}^2+\bar{c}\cdot\bar{a}+\frac{\bar{a}^2}{4}+\bar{a}\cdot\bar{b}+\frac{\bar{b}^2}{4}+\bar{b}^2+\bar{b}\cdot\bar{c}+\frac{\bar{c}^2}{4}=$$

$$=\frac{5}{4}(a^2+b^2+c^2)+(\bar{c}\cdot\bar{a}+\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}).$$

Como $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$, $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2=0$. Así, pues, $\bar{a}^2+\bar{b}^2+\bar{c}^2+$ $+2(\bar{c}\cdot\bar{a}+\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c})=0$, es decir, $a^2+b^2+c^2=-2(\bar{c}\cdot\bar{a}+\bar{a}\cdot\bar{b}+$ $+\bar{b}\cdot\bar{c})$.

De manera que $\bar{c}\cdot\bar{a}+\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

Poniendo el valor hallado de la expresión $\bar{c}\cdot\bar{a}+\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}$, obtenemos: $AD^2+BE^2+CF^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$, ya que de acuerdo con la propiedad del cuadrado escalar $\overline{AD}^2=AD^2$, $\overline{BE}^2=BE^2$, $\overline{CF}^2=CF^2$.

EJEMPLO 9. Demostremos que las alturas de un triángulo arbitrario se cortan en un solo punto.

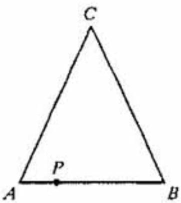


Fig. 89

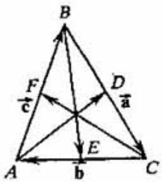


Fig. 90

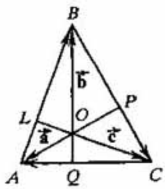


Fig. 91

SOLUCIÓN. Sean AP, BQ y CL las alturas del $\triangle ABC$ y O el punto de intersección de las alturas AP y BQ (fig. 91).

Para abreviar, hagamos $\overline{OA}=\bar{a}$, $\overline{OB}=\bar{b}$, $\overline{OC}=\bar{c}$.

Por definición de la diferencia de vectores $\overline{AB}=\bar{b}-\bar{a}$, $\overline{BC}=$ $=\bar{c}-\bar{b}$, $\overline{CA}=\bar{a}-\bar{c}$.

Como, seguidamente, $\overline{OA}\perp\overline{BC}$, $\bar{a}(\bar{c}-\bar{b})=0$, es decir,

$$\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{b}. \tag{1}$$

Por analogía, como $\overline{OB}\perp\overline{CA}$, $\bar{b}(\bar{a}-\bar{c})=0$, de donde

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{c}. \tag{2}$$

De las igualdades (1) y (2), debido a la transitividad, se deduce que $\overline{a}\cdot\overline{c} = \overline{b}\cdot\overline{c}$ o bien $\overline{c}\,(\overline{a} - \overline{b}) = 0$.

Esto último significa que $\overline{OC} \perp \overline{AB}$ o bien que $\overline{CO} \perp \overline{AB}$. Como por el punto dado pasa una sola recta perpendicular a la dada y, entonces, del hecho que $CO \perp AB$ y $CL \perp AB$ se desprende que CL coincide con CO. Así, pues, las tres alturas del triángulo se cortan en un punto.

PROBLEMAS PARA EL TRABAJO INDIVIDUAL

I. Adición y sustracción de vectores. Multiplicación de un sector por un número

398. Para que el cuadrilátero $ABCD$ sea un paralelogramo es necesario y suficiente que para cualquier punto Q se verifique la igualdad $\overline{QA} + \overline{QC} = \overline{QB} + \overline{QD}$. Demuestren esto.

399. En el cuadrilátero $ABCD$, M, N, P y Q son los correspondientes puntos medios de los lados sucesivos. Demuestren que el cuadrilátero $MNPQ$ es un paralelogramo.

400. En el lado AB del cuadrilátero $ABCD$ se ha construido el paralelogramo $ABCC'$ y tomado el punto O que es el punto medio del segmento $C'D$. Demuestren que si M y N son los puntos medios de los lados AB y CD, respectivamente, el segmento AO es igual y paralelo al segmento MN.

401. En el cuadrilátero $ABCD$ M y N son los puntos medios de los lados AD y BC, respectivamente. Demuestren que $2MN \leqslant AB + CD$.

402. Demuestren que la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es igual a la semidiferencia de sus bases.

403. Si la longitud del segmento que une los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero convexo es igual a la semisuma de los otros dos lados, este cuadrilátero es un trapecio o un paralelogramo. Demuéstrenlo.

404. M y N son los puntos medios de los lados AB y CD, respectivamente, del cuadrilátero $ABCD$. Demuestren que los puntos medios de las diagonales de los cuadriláteros $AMND$ y $BMNC$ son los vértices de un paralelogramo (o que yacen en una misma recta).

405. Con el fin de que el punto Q sea el centro de gravedad del triángulo ABC es necesario y suficiente que $\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} = \overline{0}$. Demuéstrenlo.

406. Del punto M, situado dentro del triángulo ABC, se trazan perpendiculares a los lados BC, AC, AB y en ellas se marcan los segmentos MA_1, MB_1 y MC_1 iguales a los correspondientes lados del triángulo. Demuestren que el punto M es el centro de gravedad del triángulo $A_1C_1B_1$.

407. Demuestren que en un cuadrilátero arbitrario, el segmento que une los puntos medios de las diagonales pasa por el punto de intersección de las líneas medias y se divide con él por la mitad.

408. Están dados el triángulo ABC y el punto Q tomado al azar. Demuestren que si construimos los paralelogramos QBB_1C y QAA_1B_1, la diagonal QA_1 del último pasa por el centro de gravedad O del triángulo dado y que $QA_1 = 3QO$.

409. Demuestren que la recta que pasa por el vértice A del triángulo ABC y el punto medio de la mediana BD divide el lado BC en la razón $1 : 2$.

410. Se dan dos segmentos iguales AB y A_1B_1. ¿Cuál debe ser el ángulo entre las rectas, a las que pertenecen dichos segmentos, para que la distancia entre los puntos medios de los segmentos AA_1 y BB_1 sea igual a $\frac{1}{2}AB$?

411. Dentro de un paralelogramo se ha tomado el punto M y por él, se trazan rectas paralelas a los lados de la figura. Ellas cortan los lados del paralelogramo en los puntos A, C y B, D. Demuestren que el punto de intersección de las líneas medias del cuadrilátero $ABCD$ es el punto medio del segmento OM, donde O es el centro del paralelogramo dado.

412. Demuestren que la recta que une los puntos medios de las bases de un trapecio, pasa por el punto de intersección de las continuaciones de los lados laterales y por el punto de intersección de las diagonales.

413. Está dado el trapecio $ABCD$. La recta paralela a las bases AB y CD corta los lados laterales AD y BC en los puntos M y N, respectivamente. Demuestren que si $AN \parallel CM$, $DN \parallel BM$.

414. Se da el trapecio $ABCD$ en el cual AB y CD son las bases y M y N, los puntos medios de sus lados AD y BC. Demuestren que la recta AN no es paralela a la recta CM.

415. En la circunferencia con centro en O, se han trazado dos cuerdas: los puntos perpendiculares AB y CD que concurren en el punto M. Demostrar que medios de las cuerdas AC y BD, el punto M y el centro de la circunferencia dada son los vértices de un paralelogramo.

416. En el triángulo ABC se ha trazado la mediana CC_1. Demuestren que $CC_1 < \frac{1}{2}(CA+CB)$.

417. Está dado el triángulo ABC. Demuestren que $OM < \frac{1}{3}(OA+$ $+OB+OC)$, donde M es el punto de intersección de las medianas del triángulo, O, un punto arbitrario en el plano.

418. Dos paralelogramos $ABCD$ y $AB_1C_1D_1$ tienen un vértice común A. Demuestren que $CC_1 \leqslant BB_1 + DD_1$.

419. Se dan dos paralelogramos $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$. Demuestren que, en el caso general, los puntos medios de los segmentos AA_1, BB_1, CC_1 y DD_1 son los vértices del paralelogramo $A_0B_0C_0D_0$. Construyan dos semejantes paralelogramos de modo que los puntos A_0, B_0, C_0 y D_0 coincidan o pertenezcan a una recta.

420. Está dado el paralelogramo $ABCD$. Los puntos P, Q, R y S dividen los lados AB, BC, CD y DA en iguales razones. Demuestren que el cuadrilátero $PQRS$ es un paralelogramo.

421. Sean dados dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$. Demuestren que si las medianas del primer triángulo son paralelas a los lados del segundo, las medianas de éste son paralelas a los lados del primero.

422. Sea dado el cuadrilátero $ABCD$. Se ha construido el segundo cuadrilátero con los vértices en los puntos de intersección de las medianas de los triángulos BCD, CDA, DAB y ABC. Demuestren que las líneas medias de los cuadriláteros concurren en un mismo punto.

423. En un plano se dan cuatro rectas, de las cuales ni una de tres de ellas pasa por un punto y ningunas dos son paralelas. Demuestren que si una de las cuatro rectas es paralela a la mediana de un triángulo, definido por las tres restantes, cada una de las demás tres rectas poseen propiedades análogas.

424. Por los vértices A, B y C del triángulo ABC se han trazado las rectas l, m y n, respectivamente, que se cortan en el punto S. Demuestren que las rectas l_1, m_1 y n_1 que pasan, respectivamente, por los puntos medios A_0, B_0 y C_0 de los lados BC, CA y AB paralelas a las líneas l, m y n, también se cortan en un mismo punto.

425. Sean dados el triángulo ABC y el punto M, los puntos medios A_1, B_1 y C_1 de sus lados BC, CA y AB. Por A, B y C se han trazado rectas paralelas a las rectas MA_1, MB_1 y AC_1, respectivamente. Demuestren que dichas rectas concurren en un punto.

426. Demuestren que si la longitud de la línea media MN del cuadrilátero $ABCD$ es igual a la semisuma de las longitudes de sus lados AB y CD (M pertenece a BC y N, a DA), $ABCD$ es un trapecio o paralelogramo.

427. En los lados del triángulo ABC, fuera de él, están construidos los triángulos equiláteros ABC_1, BA_1C y CAB_1. Demuestren que los puntos de intersección de las medianas de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ coinciden.

428. En la continuación de las alturas AA_1 y BB_1 del triángulo ABC, tras sus vértices A y B, se han trazado los segmentos AA_2 y BB_2, con la particularidad de que $AA_2 = BC$ y $BB_1 = AC$. Demuestren que $CA_2 = CB_2$ y que $CA_2 \perp CB_2$.

429. En los lados CA y CB del triángulo ABC, fuera de él, se construyen los cuadrados CAA_1C_1 y CBB_1C_1'. Demuestren que la mediana del triángulo CC_1C_1' trazada por el vértice C es perpendicular al lado AB e igual a su mitad.

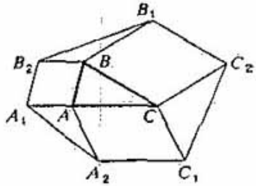


Fig. 92

430. En los lados del cuadrilátero $ABCD$, fuera de él, se construyen los cuadrados ABB_1A_1, BCC_1B_1', CDD_1C' y $DAA_1'D_1'$ con sus centros P, Q, R y S, respectivamente. Demuestren que los segmentos PR y QS son iguales y perpendiculares.

431. Está dado el cuadrilátero $ABCD$. Sus líneas medias concurren en el punto M. Se ha trazado una quebrada $MAUV$, donde $\overline{AU} = \overline{MB}$, $\overline{UV} = \overline{MC}$. Demuestren que M es el punto medio del segmento VD. Hallen la razón entre el área del cuadrilátero $ABCD$ y la del cuadrilátero $MAUV$.

432. Demuestren que al cortarse las medianas de un triángulo se dividen en la razón $2:1$.

433. En el lado AD y la diagonal AC del paralelogramo $ABCD$ se han tomado los puntos M y N de forma que $AM = \frac{1}{5}AD$ y $AN = \frac{1}{6}AC$. Demuestren que los puntos B, N, M yacen en una misma recta. ¿En qué razón divide el punto N el segmento MB?

434. Demuestren que en el cuadrilátero arbitrario $ABCD$ los segmentos, cuyos extremos son los puntos medios de los lados opuestos (P, K, R y L son los puntos medios de los lados AB, BC, CD, AD, respectivamente) y el segmento, cuyos extremos son los puntos medios de las diagonales (M es el punto medio de BD), concurren en un punto y en él se dividen por la mitad.

435. Están dadas dos rectas l_1 y l_2 y dos pares de puntos A_1, A_2 y B_1, B_2. Hallen, correspondientemente, en las rectas tales puntos C_1 y C_2 que $A_1C_1 \parallel A_2C_2$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$.

436. En los lados del triángulo ABC están construidos los paralelogramos ABB_2A_1, BCC_2B_1, ACC_1A_2 (fig. 92). ¿Es posible construir un triángulo, cuyos lados sean iguales a los segmentos B_1B_2, C_1C_2, A_1A_2?

II. Producto escalar de vectores

437. Se dan dos lados $AB = a$ y $CD = p$ del cuadrilátero $ABCD$ y el ángulo α entre estos lados. Hallen la longitud del segmento que une los puntos medios de los otros dos lados del cuadrilátero.

438. En el triángulo ABC con lados $AB = 5$, $BC = 2$ y $AC = 4$ calculen el ángulo ABC.

439. Demuestren que las alturas de un triángulo obtusángulo se cortan.

440. Demuestren que en un paralelogramo la suma de los cuadrados de sus diagonales es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

441. Demuestren que si $ABCD$ es un paralelogramo, para todo punto M es válida la igualdad $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

442. Demuestren que el ángulo C del triángulo ABC será agudo, recto u obtuso en función de si es la mediana CD mayor, igual o menor que $\frac{1}{2}AB$.

443. Demuestren que en el triángulo ABC, con el centro de gravedad en M es válida la relación $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(MA^2 + MB^2 + MC^2)$.

444. Demuestren que si el centro de gravedad del triángulo ABC coincide con el punto de intersección de las alturas, el triángulo es equilátero.

445. Expresen cada mediana de un triángulo con sus lados.

446. En un trapecio con diagonales perpendiculares entre sí, la base mayor es igual a 4, la menor, a 3. Hallen su lado lateral si sabemos que él constituye un ángulo de 60° con la base mayor.

447. Se da el triángulo ABC en el que $AC = 4$, $BC = 3$ y $\angle ABC = 120°$. Hallen la distancia desde el vértice C hasta el punto M que divide el lado AB en la razón $1:3$, contando desde el vértice A.

448. Demuestren que si en el triángulo rectángulo ABC desde el vértice del ángulo recto se traza la altura CD: a) $CD^2 = AD \cdot BD$; b) $AC^2 = AB \cdot AD$; c) $BC^2 = BA \cdot BD$.

449. Las diagonales de un trapecio rectángulo son perpendiculares entre sí. Demuestren que la altura del trapecio es la media proporcional entre sus bases.

450. Demuestren que en el trapecio $ABCD$, cuyas bases son AB y CD, se verifica la desigualdad $AC^2 + BD^2 > AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot DC$.

451. Con el fin de que las diagonales de un cuadrilátero sean perpendiculares entre sí es necesario y suficiente que las sumas de los cuadrados de los lados opuestos de la figura sean iguales. Demuéstrenlo.

452. Demuestren que si en un triángulo dos medianas son perpendiculares entre sí, la suma de sus cuadrados es igual al cuadrado de la tercera mediana.

453. Hallen la dependencia entre los lados del triángulo ABC si sus medianas AA_1 y BB_1 son perpendiculares.

454. Los catetos del triángulo rectángulo son iguales a a y b. Hallen la bisectriz trazada desde el vértice del ángulo recto.

455. Desde el punto medio D de la base AB del triángulo isósceles ABC se ha trazado la perpendicular DM al lado BC. N es el punto medio del segmento MD. Demuestren que los segmentos AM y CN son perpendiculares.

456. Por el vértice del ángulo recto C del triángulo ABC se ha trazado una recta a la que desde los vértices A y B se trazaron las perpendiculares AA_1 y BB_1. El vértice C está reflejado en el punto C' con relación al punto medio M del segmento A_1B_1. Demostremos que $\angle AC_1B = \frac{\pi}{2}$.

457. En el lado AB del triángulo ABC, por diferentes lados de la recta AB, se han construido los triángulos equiláteros ABC_1 y ABC_2. Hallen la dependencia entre los lados del triángulo dado si las rectas CC_1 y CC_2 son perpendiculares ($C \neq C_1$, $C \neq C_2$).

III. Diferentes problemas

458. Fuera de un paralelogramo se han construido en sus lados cuadrados. Demuestren que los centros de éstos son los vértices de un cuadrado.

459. En los lados AB y BC del triángulo ABC, fuera de él, se han construido los cuadrados $ABDE$ y $BCKF$. Demuestren que el segmento DF es dos veces mayor que la mediana BP del triángulo ABC y perpendicular a ella.

460. En los lados AB y BC del triángulo ABC, fuera de él, se han construido los triángulos equiláteros ABC_1 y BCA_1. Demuestren que el segmento que une los puntos medios de los segmentos AB y A_1B_1 es igual a la mitad del segmento AC y constituye con él un ángulo de 60°.

461. En los lados AB y BC del triángulo ABC, fuera de él, están construidos los triángulos equiláteros ABC_1 y BCA_1. Demuestren que si M, N y P son los puntos medios de los lados AC, C_1B y BA_1, respectivamente, el triángulo MNP es equilátero.

462. Las diagonales AC y BD del trapecio isósceles $ABCD$ ($AB \parallel CD$) concurren en el punto O bajo un ángulo de 60°. Demuestren que los puntos medios de los segmentos OA, OD y BC son los vértices de un triángulo equilátero.

463. En el trapecio $ABCD$ la diagonal AC corta el triángulo equilátero ACD. Desde el punto E en la diagonal AC (o de su continuación) la base BC se ve bajo un ángulo de 60°. Demuestren que los puntos medios de los segmentos AE, BC y CD son los vértices de un triángulo equilátero.

464. Si en dos lados de un paralelogramo que salen de un mismo vértice se construyen (por fuera o por dentro) triángulos regulares, el vértice opuesto del paralelogramo y los vértices libres de los triángulos forman un triángulo regular. Demuéstrenlo.

465. Sean dados dos triángulos equiláteros $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ orientados en el mismo sentido. Los segmentos A_1A_2, B_1B_2 y C_1C_2 están divididos por los puntos A, B y C en iguales razones desde los extremos A_1, B_1 y C_1, respectivamente. Demuestren que el triángulo ABC es equilátero.

466. En el trapecio rectángulo $ABCD$ con ángulo agudo de 45°, la diagonal AC es igual al lado CD. Hemos de demostrar que el punto medio de la base menor es equidistante del vértice A y del punto medio del lado CD.

467. En los segmentos AB y AC de cierta recta están construidos los triángulos rectángulos isósceles ABC_1 y ACB_1 ($\angle C_1 = \angle B_1 = 90°$) orientados en sentidos opuestos. Demuestren que el punto medio del segmento BC y los puntos B_1 y C_1 son los vértices de un triángulo rectángulo isósceles.

468. En el triángulo ABC con ángulo B de 45°, se han trazado las alturas CC_1 y AA_1 que concurren en el punto O. Vamos a demostrar que los puntos medios de los segmentos BC, A_1C_1 y CD son los vértices de un triángulo rectángulo isósceles.

469. En los lados AB y BC del triángulo ABC, fuera de él, se han construido los triángulos equiláteros ABC_1 y BCA_1 con los centros en O_1 y O_2, respectivamente. Demuestren que el segmento O_1O_2 es dos veces más largo que el segmento que une los puntos medios de los segmentos O_1C y C_1O_2 y que forma con ellos un ángulo de 60°.

470. En los lados AB, BC y CD del rectángulo $ABCD$, fuera de él, se han construido los triángulos equiláteros ABO_1, BCO_2 y CDO_3. Demuestren que las distancias entre los puntos medios de los segmentos AB, O_1O_2 y BC, O_2O_3 son iguales.

471. Fuera del cuadrilátero convexo $ABCD$, se han construido en sus lados AB y CD los cuadrados $ABMN$ y $CDKL$. Demuestren que los puntos medios de las diagonales de los cuadriláteros $ABCD$ y $MNKL$ son los vértices de un cuadrado o coinciden.

472. Sean dados dos cuadrados $A_1B_1C_1D_1$ y $A_2B_2C_2D_2$ orientados en el mismo sentido. Los segmentos A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 y D_1D_2 están divididos por los puntos A_0, B_0, C_0 y D_0 en una misma razón, partiendo desde los vértices de uno de estos cuadrados. Demuestren que el cuadrilátero $A_0B_0C_0D_0$ es un cuadrado.

473. Sean dados dos polígonos regulares homónimos $A_1A_2 \ldots A_n$ y $B_1B_2 \ldots B_n$ de igual orientación. Los segmentos A_1A_2, B_1B_2, ..., A_nB_n están divididos por los puntos C_1, C_2, ..., C_n, correspondientemente, en una misma razón comenzando desde los vértices de uno de los polígonos dados. Demuestren que el polígono $C_1C_2 \ldots C_n$ es regular.

474. Fuera del triángulo ABC, se han construido en sus lados AB y BC los triángulos rectángulos ABD y BCE ($\angle B = \angle C = 90°$) orientados en un mismo sentido. Demuestren que los puntos medios de los segmentos AB, BC y DE son los vértices de un triángulo rectángulo isósceles.

475. En el cuadrado $ABCD$ el punto O es el centro, M y N son los puntos medios de los segmentos BO y CD. Demuestren que el triángulo AMN es isósceles y rectángulo.

476. En los lados del cuadrilátero $ABCD$, fuera de él, se han construido los triángulos rectángulos isósceles ABM, BCN, CDP y DAQ ($\angle M = \angle N = \angle P = \angle Q = 90°$). Demuestren que los puntos medios de los segmentos MP y NQ y los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero son los vértices de un cuadrado.

477. En triángulo rectángulo ABC, desde el vértice del ángulo recto, se ha trazado la altura CD. Los puntos M y N dividen los lados AC y CB, respectivamente, en razones iguales (partiendo de los extremos A y C). Demuestren que el triángulo DMN es semejante al prefijado.

478. En la base y en uno de los lados laterales de un triángulo isósceles, fuera de él, han sido construidos cuadrados. Demuestren que los centros de éstos y el punto medio del otro lado lateral son los vértices de un triángulo rectángulo isósceles.

479. En el rectángulo $ABCD$ se ha trazado la perpendicular BK a la diagonal AC. Los puntos M y N dividen por la mitad los segmentos AK y CD, respectivamente. Demuestren que $\angle BMN = 90°$.

480. Con relación a la hipotenusa AB del triángulo rectángulo ABC se ha construido el triángulo ABC_1 simétrico al primero. Si M es el punto medio de la altura C_1D del triángulo ABC y N, el punto medio del lado BC, el triángulo AMN es semejante al $\triangle ABC$. Demuéstrenlo.

481. Sea dado el paralelogramo ABC. En las rectas AB y BC se han elegido los puntos H y K de forma que los triángulos KAB y HCB son isósceles ($KA = AB$ y $HC = CB$). Demuestren que el triángulo KDH también lo es.

482. El cuadrilátero $ABCD$ está girado en torno a cierto punto O, que yace en el plano, a 90° a la posición $A_1B_1C_1D_1$. Demuestren que si P, Q, R y S son los puntos medios de los segmentos A_1B, B_1C, C_1D y D_1A, respectivamente, los segmentos PR y QS son perpendiculares e iguales.

483. Fuera de un cuadrilátero se han construido en sus lados cuadrados. Demuestren que sus centros son los vértices de un cuadrilátero con diagonales iguales y perpendiculares mutuamente.

484. En el triángulo rectángulo ABC, desde el vértice del ángulo recto, se ha trazado la altura CD y construido el punto D_1 simétrico al punto D con relación al cateto AC. Demuestren que el punto A y los puntos medios de los segmentos D_1C y CB son los vértices de un triángulo semejante al dado.

485. En el triángulo rectángulo ABC se ha construido el punto D_1, simétrico a cierto punto D del cateto BC, con relación a hipotenusa AB; E es el punto de intersección de los segmentos DD_1 y AB_1; M y N, correspondientemente, los puntos medios de los segmentos AD_1 y CE. Demuestren que $\angle MNB = 90°$.

486. En el triángulo ABC se han trazado las alturas AA_1 y BB_1 y construido el punto A_2 simétrico al punto A_1 con relación a la recta AC; M y N son los puntos medios de los segmentos B_1A_2 y AB, respectivamente. Demuestren que el triángulo CMN es rectángulo.

487. En el lado AB del triángulo ABC, como sobre un diámetro, está circunscrita una circunferencia que corta las rectas AC y BC en los puntos A_1 y B_1 respectivamente. Demuestren que los puntos medios de las cuerdas AB_1 y BA_1, la base de la altura trazada en este triángulo desde el vértice C, forman un triángulo semejante al dado.

488. Desde el punto M, tomado al azar en la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, se trazan las perpendiculares MA_1 y MB_1 a los lados BC y AC; P y Q son, respectivamente, los puntos medios de los segmentos AB y A_1B_1. Demuestren que $\angle PQM = 90°$.

489. Desde el vértice A del triángulo ABC se traza la bisectriz AD hasta su intersección con la circunferencia circunscrita a dicho triángulo en el punto

A_1; M y N son los puntos medios de los segmentos CD y A_1B_1, respectivamente. Demuestren que los triángulos ACA_1 y AMN son semejantes.

490. La cuerda común de dos circunferencias intersecantes es el diámetro de una de ellas. Por uno de los extremos de este diámetro se trazan tangentes a las mencionadas circunferencias. Demuestren que el otro extremo del diámetro y los puntos medios de los segmentos de las tangentes trazadas, cortadas por las circunferencias, son los vértices de un triángulo rectángulo.

491. En el triángulo ABC las alturas AD y BE se han continuado tras los vértices A y B y en sus continuaciones se marcan tales segmentos AM y BN que $AM = BC$ y $BN = AC$. Demuestren que los segmentos CM y CN son perpendiculares e iguales.

492. Fuera del triángulo ABC se construyen en sus lados AC y BC los triángulos equiláteros ACB_1 y BCA_1; M es el punto medio del lado AB y O, el centro del triángulo ACB_1. Determinen los ángulos del triángulo MA_1O.

493. Fuera del triángulo ABC se construyen en sus lados AC y BC los cuadrados $ACDA_1$ y $BCEB_1$. Demuestren que las rectas AB_1 y BA_1 se cortan en la altura del triángulo dado trazada al lado AB.

494. Sean dados tres triángulos equiláteros A_1BC, A_2DE y A_3FQ con igual orientación, con la particularidad de que los puntos A_1, A_2 y A_3 son los vértices de un triángulo equilátero orientado en el mismo sentido. Demuestren que los puntos medios de los segmentos CD, EF y QB son los vértices de un triángulo equilátero.

495. Se da el paralelogramo $ABCD$. En sus lados CD y BC, pero fuera de él, están construidos los triángulos semejantes CDE y FBC orientados en el mismo sentido. Demuestren que el triángulo FAE es semejante a ellos y su orientación es la misma.

496. En los lados AB, AC y BC del triángulo ABC, como sobre sus bases, se han construido los triángulos isósceles semejantes ABP, ACQ y BCR. Los dos primeros están fuera del triángulo dado, por el contrario, el tercero, por el mismo lado de BC que el triángulo dado (o bien a la inversa). Demuestren que el cuadrilátero $APBQ$ es un paralelogramo.

497. Fuera del triángulo ABC se han construido en sus lados AC y BC los paralelogramos semejantes $ACMN$ y $BCPQ$. Demuestren que las rectas NB y QA se cortan en la altura del triángulo (o bien en su continuación) trazada desde el vértice C.

498. En el extremo A de la cuerda AB de la circunferencia O se traza a ella una tangente a la cual, desde el punto B, se baja la perpendicular BM que, por segunda vez, tropieza con la circunferencia en el punto C. Demuestren que el centro O, el punto N, que divide la cuerda AB en la razón $AN : NB = 1 : 2$ y el punto C', simétrico a C con relación al punto M, yacen en una misma recta.

499. Los lados opuestos AB y CD del cuadrilátero $ABCD$ están divididos por los puntos M y N, respectivamente, en iguales razones contando desde los puntos A y C. Demuestren que el segmento MN divide la línea media del cuadrilátero en la misma razón y se divide por la línea media por la mitad.

500. Los puntos P, Q, R y S dividen los lados del cuadrilátero $ABCD$ de forma que $AP : PB = DQ : QC = m$ y $AR : RD = BS : SC = n$. Demuestren que los segmentos PQ y RS se dividen entre sí en esas mismas razones.

501. En el triángulo ABC está inscrito el paralelogramo $ADEF$ de forma que los vértices D, E y F yacen, correspondientemente, en los lados AB, BC y AC. Por el punto medio M del lado BC se traza la recta AM que corta la recta DE en el punto K. Demuestren que el cuadrilátero $CFDK$ es un paralelogramo.

502. Por los vértices opuestos de un paralelogramo se han trazado rectas que cortan sus lados o sus continuaciones en cuatro puntos. Demuestren que dichos puntos son los vértices de un trapecio o paralelogramo.

503. En el trapecio $ABCD$ el punto arbitrario M del lado lateral AB está unido con los vértices C y D. De los vértices A y B se trazan las rectas AN y

BN paralelas a las rectas CM y DM, respectivamente. Demuestren que el punto N de su intersección pertenece al lado CD.

504. Sea dado el cuadrilátero $ABCD$. La recta trazada por el vértice A, paralela al lado BC, corta la diagonal BD en el punto M, mientras que la recta trazada por el vértice B, paralela al lado AD, corta la diagonal AC en el punto N. Demuestren que $MN \parallel CD$.

505. Está dado un hexágono arbitrario de simetría central. En sus lados, como sobre sus bases, están construidos por el exterior triángulos regulares. Demuestren que los puntos medios de los segmentos que unen los vértices de los triángulos vecinos son los vértices de un hexágono regular.

506. En el lado AC del triángulo ABC se toma un punto M tal que $AM = \frac{1}{3} AC$ y en la continuación del lado BC tal punto N que $BN = CB$. ¿En qué razón divide a cada uno de los segmentos AB y MN su punto de intersección?

507. Están dados tres segmentos A_1A_2, B_1B_2 y C_1C_2. Designemos sus puntos medios con A_3, B_3 y C_3, respectivamente. Sean M_1, M_2 y M_3 los centros de gravedad de los triángulos $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ y $A_3B_3C_3$, respectivamente. Demuestren que M_3 es el punto medio del segmento M_1M_2 (o bien que los puntos M_1, M_2 y M_3 coinciden).

508. En la mediana CM del triángulo ABC se da el punto N. Por ella se trazan las rectas AN y BN que cortan los lados BC y AC en los puntos A_1 y B_1, respectivamente. Demuestren que el segmento A_1B_1 se divide con la mediana CM por la mitad y es paralelo al lado AB.

509. En el lado AB del triángulo ABC se da el punto P por el que se trazan rectas paralelas a sus medianas AM_1 y BM_2 y que cortan los correspondientes lados del triángulo en los puntos A_1 y B_1. Demuestren que el punto medio del segmento A_1B_1, el punto P_1 y el punto de intersección Q de las medianas del triángulo dado yacen en una misma recta.

510. La distancia desde el punto de intersección de las medianas de un triángulo hasta el centro de la circunferencia circunscrita a él es igual a un tercio del radio de dicha circunferencia. Demuestren que el mencionado triángulo es rectángulo.

511. En dos rectas se dan los correspondientes segmentos AB y CD. Con los puntos M y M_1 el segmento AB se divide en las razones $AM : AB = BM_1 : AB = AC : BD$, $AC \neq BD$, en tanto que el segmento CD está dividido con los puntos N y N_1 en esas mismas razones, respectivamente. Demuestren que el segmento MM_1 es perpendicular al segmento NN_1.

512. Demuestren que si los lados laterales de un trapecio son perpendiculares, la suma de los cuadrados de sus bases es igual a suma de los cuadrados de las diagonales.

513. Si en un cuadrilátero la suma de los cuadrados de sus diagonales es igual a la suma de los cuadrados de todos sus lados, este cuadrilátero es un paralelogramo. Demuéstrenlo.

514. Están dados dos cuadrados $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$ orientados en el mismo sentido. Demuestren que $AA_1^2 + CC_1^2 = BB_1^2 + DD_1^2$.

515. En la mediana CM_3 del triángulo ABC se da el punto P, por el cual se trazan las rectas AP y BP que cortan los lados CB y AC en los puntos A_1 y B_1, respectivamente. Demuestren que si $AA_1 = BB_1$, entonces el triángulo es isósceles.

516. En la base AB del triángulo isósceles ABC se da el punto P. Demuestren que $PC^2 = AC^2 - AP \cdot BP$. Aclaren cómo variará la fórmula si el punto P se encontrara en la continuación de la base AB.

517. Demuestren que si del punto arbitrario M, tomado dentro del triángulo rectángulo ABC (el ángulo C es recto), se trazan las perpendiculares MX, MY y MZ a los lados BC, CA y AB, respectivamente, tiene lugar la relación $AY \cdot AC + BZ \cdot BA + CX \cdot CB = AB^2$.

518. En la continuación de los lados AB, BC y CA del triángulo ABC se han tomado, correspondientemente, los puntos M, N y P de forma que $BM = AB$, $CN = BC$ y $AP = CA$. Calculen la razón entre la suma de los cuadrados de los lados del triángulo PMN y la suma de los lados del triángulo ABC.

519. Los lados laterales BC y AD del trapecio $ABCD$ están girados en torno de sus puntos medios en sentido positivo a 90°, después de lo cual ellos ocupan la posición de los segmentos B_1C_1 y A_1D_1. Demuestren que $D_1C_1 = A_1B_1$.

520. En los lados AB, CD y EF de un hexágono de simetría central, se han construido los triángulos equiláteros ABP, CDQ y EFR con igual orientación. Demuestren que el triángulo PRQ es equilátero (en particular él puede degenerar en un punto).

521. El lado AC del triángulo ABC está girado alrededor del vértice A a $+90°$ y el lado BC, en torno al vértice B a $-90°$. Demuestren que la posición del punto medio del segmento C_1C_2, que une los extremos C_1 y C_2 de los segmentos girados, no depende de la posición del vértice C.

522. En los lados de un cuadrilátero, como sobre sus diámetros, se construyen semicircunferencias, con la particularidad de que dos circunferencias opuestas están dirigidas al interior del cuadrilátero y las otras dos, al exterior. Demuestren que los puntos medios de dichas semicircunferencias son los vértices de un paralelogramo.

523. Está dado un cuadrado. Se construyen diversos triángulos rectángulos isósceles. El vértice de uno de los ángulos agudos de aquéllos coincide con el vértice del cuadrado, en tanto que el vértice del ángulo recto pertenece a sus diagonales. Hallen el conjunto de los terceros vértices de los triángulos que consideramos.

524. Fuera de un triángulo arbitrario se construyen en sus lados cuadrados. Demuestren que las alturas de un triángulo, cuyos vértices son los centros de dichos cuadrados, pasan, respectivamente, por los vértices del triángulo dado.

525. En el triángulo ABC se han trazado las alturas AA_1, BB_1 y CC_1; A_0, B_0 y C_0 son los puntos medios de las mencionadas alturas. Demuestren que los triángulos $A_0B_0C_1$, $B_0C_0A_1$ y $A_0C_0B_1$ son semejantes.

526. Están dadas las rectas paralelas q_1 y q_2 y dos pares de puntos A_1, A_2 y B_1, B_2. Hallen en las rectas, respectivamente, tales puntos C_1 y C_2 de forma que $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ y $B_1C_1 \parallel B_2C_2$.

527. En el cuadrilátero $ABCD$ los lados BC y AD están divididos en partes iguales con los puntos B_1, B_2 y A_1, A_2, respectivamente. ¿Es siempre posible trazar una recta de modo que su segmento contenido entre los lados AB y CD se divida con las rectas A_1B_1 y A_2B_2 en partes iguales?

528. Son dados tres puntos A_1, B_1 y C_1. Considerándolos como los puntos de división de los correspondientes lados de cierto triángulo ABC en la razón $2 : 1$, por una misma dirección de circulación, construyan el triángulo ABC.

529. En la hipotenusa de un triángulo rectángulo o en su continuación hallen tal punto que la recta que une sus proyecciones en los catetos sea perpendicular a la hipotenusa.

530. Sean OA, OB y OC tres rayos que cortan dos rectas a y b en los puntos A, B, C y A_1, B_1, C_1, respectivamente, de forma que $AB : BC = n$, $OA : AA_1 = m$. Hallen la dependencia entre las relaciones $OB : OB_1 = x$ y $OC : OC_1 = y$.

531. Los lados opuestos AB y DC, AD y BC del cuadrilátero $ABCD$ se cortan en los puntos E y F, respectivamente. Demuestren que los segmentos formados satisfacen la igualdad $\dfrac{AE \cdot CE}{BE \cdot DE} = \dfrac{AF \cdot CF}{BF \cdot DF}$.

532. Una recta que pasa por el centro de gravedad de un triángulo divide sus lados en ciertos segmentos. Hallen la dependencia entre la razón de las longitudes de los segmentos de un lado y la relación de los segmentos del otro lado.

533. Demuestren que si en un cuadrilátero las continuaciones de los lados opuestos a pares se cortan, el punto medio del segmento que une dichos puntos de intersección yace en una misma recta que los puntos medios de las diagonales.

534. Demuestren que la suma de las cuartas potencias de las distancias de un punto dado, situado en el plano de cierta circunferencia, hasta los vértices de todo cuadrado inscrito en ella es constante.

§ 7. VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS*

Es cómodo resolver los problemas para determinar los valores máximos y mínimos, según el siguiente plan:

1. Se revela la magnitud a optimizar (es decir, aquella para la que hay que hallar el valor máx o mín) y se designa, p.ej., con la letra y (o S, P, r, R, etc., en función de la fábula del problema).

2. Una de las magnitudes incógnitas (el lado, ángulo, etc.) se declara variable independiente y se designa con la letra x; se establecen los límites reales de variación de x (de acuerdo con el planteamiento del problema).

3. Partiendo de las condiciones concretas del problema dado se expresa la magnitud y con x y las magnitudes conocidas (etapas de la resolución geométrica del problema).

4. Para la función $y = f(x)$ obtenida en la etapa anterior se halla el máx o mín (en dependencia de lo que requiere el problema) por el intervalo de la variación real de x hallado en el punto 2.

5. Se interpeta el resultado del punto 4 para el problema geométrico a resolver.

En las tres primeras etapas se confecciona, como se suele decir, el modelo matemático, es decir analítico, del problema geométrico. (El éxito en la resolución del problema depende con frecuencia de la elección acertada de la variable independiente. Es deseable que dicha elección conduzca a una expresión analítica sencilla comparativamente de y con x.) En la cuarta etapa el modelo matemático elaborado se investiga con la mayor frecuencia mediante procedimientos del análisis matemático, en ocasiones con métodos elementales. Al realizar semejante investigación, el propio problema geométrico que fue punto de partida para el modelo matemático no interesa al investigador. Solo cuando finaliza la resolución del problema en los márgenes del modelo matemático confeccionado, el resultado obtenido se interpreta para la solución del problema geométrico inicial (quinta etapa).

Recordemos el plan para resolver, con los procedimientos del cálculo diferencial, el problema de la determinación del valor máximo o mínimo de la función $y = f(x)$ que se deriva en el intervalo X:

---

* Para abreviar aquí y en lo adelante, por máx y mín se designan los valores superiores máximos e inferiores mínimos de las funciones. —(N. del R.)

1) se halla $f'(x)$;

2) se hallan los puntos estacionarios y críticos para la función $f(x)$, es decir, correspondientemente, los puntos en los que $f'(x) = 0$ o bien $f'(x)$ no existe; de ellos se eligen aquellos puntos que pertenecen al intervalo X;

3) se confecciona la tabla de los valores de la función $y = f(x)$; en esta tabla se incluyen los valores de la función en los puntos hallados en el punto 2, así como en los extremos del intervalo X. Si éste no contiene sus extremos, en la tabla se incluyen los límites de la función $f(x)$ en sus extremos.

Hay que tomar asimismo en consideración que el problema puede ser resuelto con mayor facilidad por vía puramente geométrica (véase más adelante el ejemplo 5, *II procedimiento*).

EJEMPLO 1. En una circunferencia de radio R están dados los puntos A y B, entre los que la distancia es igual a a y el punto C tomado al azar. ¿A qué será igual el valor máximo de la expresión $AC^2 + BC^2$?

SOLUCIÓN. (Fig. 93.) 1. La magnitud que optimizamos es la suma $AC^2 + BC^2$; designémosla con y.

2. Elegimos la variable independiente, hacemos $\angle CAB = x$. Los límites reales de variación de esta variable son: $0 < x < \pi - \gamma$, donde $\gamma = \angle ACB$ (este ángulo no depende de la elección del punto C, ya que siempre se mide con la mitad del arco fijado AmB). Es fácil cerciorarse de que, según el sentido del problema, el punto C ha de elegirse en el arco AnB, que es mayor que la mitad de la circunferencia.

3. Expresemos y con x, a y R. De acuerdo con el teorema de los senos $AC = 2R \operatorname{sen}(\pi - x - \gamma) = 2R \operatorname{sen}(x + \gamma)$, $BC = 2R \operatorname{sen} x$ y $AB = 2R \operatorname{sen}\gamma$ o bien $a = 2R \operatorname{sen}\gamma$. Entonces, $\operatorname{sen}\gamma = \frac{a}{2R}$. Como resultado obtenemos: $y = AC^2 + BC^2 = (2R \operatorname{sen}(x + \gamma))^2 + (2R \operatorname{sen} x)^2 = 4R^2 (\operatorname{sen}^2 (x + \gamma) + \operatorname{sen}^2 x)$, así se ha confeccionado el modelo matemático del problema.

4. Consideremos ahora la función obtenida $y = 4R^2 (\operatorname{sen}^2 (x + \gamma) + \operatorname{sen}^2 x)$. Hay que hallar su valor máximo en el intervalo $]0; \pi - \gamma[$. Hagamos ciertas transformaciones de la expresión que prefija la función. Tenemos: $y = 4R^2 \left(\frac{1 - \cos(2x + 2\gamma)}{2} + \frac{1 - \cos 2x}{2}\right) = 2R^2 (2 - \cos(2x + 2\gamma) - \cos 2x) = 4R^2 (1 - \cos(2x + \gamma)\cos\gamma)$.

En el ejemplo que consideramos el valor máximo de la expresión obtenida es posible de hallar sin determinar la derivada: es evidente que él se alcanza cuando $\cos(2x + \gamma)$ tiene el valor mínimo, es decir, cuando $\cos(2x + \gamma) = -1$. Esto será con $2x + \gamma = \pi$, o sea, $\cos x = \frac{\pi - \gamma}{2}$. Indiquemos que el punto $\frac{\pi - \gamma}{2}$ pertenece al intervalo $]0; \pi - \gamma[$.

Calculemos el valor máximo de la función y: $y = 4R^2(1 - (-1)\cos\gamma) = 4R^2(1+\cos\gamma) = 4R^2\left(1+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\gamma}\right) = 4R^2 \times \left(1+\sqrt{1-\frac{a^2}{4R^2}}\right) = 2R\left(2R+\sqrt{4R^2-a^2}\right)$.

5. Efectuando la interpretación de este resultado llegamos a la conclusión: el valor máximo de la expresión $AC^2 + BC^2$ es igual a $2R\left(2R+\sqrt{4R^2-a^2}\right)$; él se alcanza cuando $\angle CAB = \frac{\pi-\gamma}{2}$, es decir, cuando el triángulo ABC es isósceles ($AC = CB$).

EJEMPLO 2. Por el punto fijado M dentro de un ángulo, tracemos una recta que corta del ángulo el triángulo de menor área.

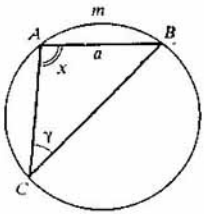


Fig. 93

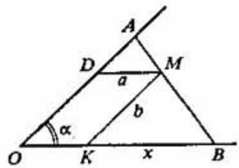


Fig. 94

SOLUCIÓN (fig. 94). 1. Por el punto M trazamos la secante AB. La magnitud que optimizamos es el área del triángulo AOB. La designemos con S.

2. Tracemos $DM \parallel OB \parallel KM \parallel OA$. Hagamos $KB = x$; los límites reales de variación de x son: $0 < x < +\infty$.

3. Como M es un punto fijado, los segmentos DM y KM también están fijados; hagamos $DM = a$, $KM = b$ y expresemos S con x, a y b.

Consideremos los triángulos MKB y AOB. De su semejanza se deduce que $\frac{KM}{OA} = \frac{KB}{OB}$, es decir, $\frac{b}{OA} = \frac{x}{a+x}$. Esto significa que $OA = \frac{b(a+x)}{x}$. A continuación tenemos: $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB \operatorname{sen}\alpha$, donde, para abreviar, se ha tomado $\alpha = \angle AOB$. Así, pues, $S = \frac{1}{2}\frac{b(a+x)}{x} \times (a+x)\operatorname{sen}\alpha = \frac{b\operatorname{sen}\alpha}{2}\cdot\frac{(a+x)^2}{x}$ (está confeccionado el modelo matemático del problema).

4. Analicemos la función $S = k\frac{(a+x)^2}{x}$, donde $0 < x < +\infty$ y $k = \frac{b\operatorname{sen}\alpha}{2}$. Hallemos su valor mínimo.

1) $S' = k\dfrac{2(a+x)x-(a+x)^2}{x^2} = k\dfrac{(a+x)(x-a)}{x^2}$.

2) La derivada no existe en el punto $x = 0$ y se reduce a cero en los puntos $x = -a$, $x = a$. De estos tres puntos sólo el punto $x = a$ pertenece al intervalo $]0; +\infty[$.

3) Hallemos los límites unilaterales de la función en los extremos del intervalo:

$$\lim_{x\to+0} \frac{k(a+x)^2}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{k(a+x)^2}{x} = +\infty.$$

La tabla de valores de la función tiene el aspecto:

x	0	$+\infty$	a
y	$+\infty$	$+\infty$	$4ka$

Es decir, el valor mínimo de la función se alcanza en el punto $x = a$.

5. Retornemos al problema geométrico inicial. Si $x = KB = a$, entonces, como $OK = a$ y MK es la línea media del triángulo AOB, por lo tanto, M es el punto medio de AB. Así, pues, con el fin de cortar en los lados del ángulo un triángulo del área mínima, hay que trazar por el punto M una recta de modo que su segmento entre los lados del ángulo se divida en el punto M por la mitad.

EJEMPLO 3. En los lados iguales AB y BC del triángulo isósceles ABC se han tomado los puntos D y E de modo que $DE \parallel AC$. Sobre DE, como en la base, se construye un cuadrado de forma que éste y el punto B yacen por diferentes lados de la recta DE. Hallemos el valor máximo del área de la intersección del triángulo con el cuadrado, si $AC = b$ y la altura BH del triángulo ABC es igual a h.

SOLUCIÓN (fig. 95). 1. La magnitud que optimizamos es el área S de la intersección del triángulo con el cuadrado.

2. Designemos con x el lado del cuadrado: $x = DE$. Hallemos los límites reales de variación de x. Está claro, que de todos los cuadrados que yacen enteramente dentro del triángulo tiene la mayor área el cuadrado inscrito, es decir, aquel cuyos cuatro vértices yacen en los lados del triángulo. Si x es mayor que el lado del cuadrado inscrito, el cuadrado y el triángulo se disponen como se muestra en la fig. 96, en este caso la intersección del cuadrado con el triángulo será el rectángulo inscrito $DEPT$ (el cuadrado inscrito es un caso particular). Es decir, los límites reales de variación de x: desde el lado del cuadrado inscrito hasta el lado AC.

Hallemos el lado del cuadrado inscrito. De la semejanza de los triángulos BDE y ABC (fig. 95), obtenemos: $\frac{x}{b}=\frac{h-x}{h}$, de donde hallamos: $x=\frac{bh}{b+h}$. Así, pues, $\frac{bh}{b+h}\leqslant x<b$.

3. Expresemos el área S del rectángulo inscrito $DEPT$ con x, a y h. De la semejanza de los triángulos ADT y ABH, obtenemos:

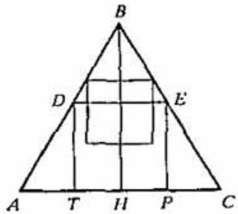


Fig. 95

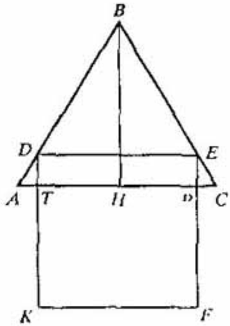


Fig. 96

$\frac{DT}{BH}=\frac{AT}{AH}$, es decir, $\frac{DT}{h}=\frac{\frac{b}{2}-\frac{x}{2}}{\frac{b}{2}}$, de donde $DT=\frac{h(b-x)}{b}$ y, por consiguiente, $S=\frac{hx(b-x)}{b}$.

4. Analicemos la función $S=\frac{h}{b}(bx-x^2)$ en el intervalo $\left[\frac{M}{b+h};b\right[$ y hallemos su valor máximo:

1) $S'=\frac{h}{b}(b-2x)$; 2) $S'=0$ con $x=\frac{b}{2}$.

Ahora, hay que aclarar si el punto $\frac{b}{2}$ yace dentro del intervalo $\left[\frac{bh}{b+h};b\right[$, es decir, si se cumple la desigualdad $\frac{bh}{b+h}<\frac{b}{2}$. Con este objeto compongamos la diferencia $\frac{bh}{b+h}-\frac{b}{2}$ y hallamos la dependencia entre b y h, con la cual ésta es negativa. Tenemos $\frac{bh}{b+h}-\frac{b}{2}=\frac{2bh-b^2-bh}{2(b+h)}=\frac{b(h-b)}{2(b+h)}$. Ahora está claro que la diferencia es negativa si $h<b$. Sin embargo, si $h\geqslant b$, entonces dentro del intervalo $\left[\frac{bh}{b+h};b\right[$ no hay puntos estacionarios.

3. Elaboremos la tabla de los valores de las funciones entre los que hay que buscar el máximo. Ante todo, señalemos que

$$\lim_{x\to b-0} S(x) = \lim_{x\to b-0} \frac{h}{b}(bx - x^2) = 0.$$

A continuación, $S\left(\frac{bh}{b+h}\right) = \left(\frac{bh}{b+h}\right)^2$, ya que $\frac{bh}{b+h}$ es el lado del cuadrado inscrito. Por fin, $S\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{h}{b}\left(b\cdot\frac{b}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = \frac{hb}{4}$. Si $h < b$, la tabla tiene la forma:

x	$\frac{bh}{b+h}$	$\frac{b}{2}$	b
S	$\left(\frac{bh}{b+h}\right)^2$	$\frac{bh}{4}$	0

Demostremos que $\frac{bh}{4} > \left(\frac{bh}{b+h}\right)^2$. Ella se reduce a la desigualded $(b+h)^2 > 4bh$, es decir, $(b-h)^2 > 0$, lo que es una evidente desigualdad.

Así, pues, si $h < b$, el valor máximo de la función S es igual a $\frac{bh}{4}$ y se alcanza en el punto $x = \frac{b}{2}$.

Si $h \geqslant b$, la tabla tiene la forma:

x	$\frac{bh}{b+h}$	b
S	$\left(\frac{bh}{b+h}\right)^2$	0

En este caso el valor máximo de la función S es igual a $\left(\frac{bh}{b+h}\right)^2$ y se alcanza en el punto $x = \frac{bh}{b+h}$.

5. Retornando al problema inicial llegamos a la siguiente conclusión. Si la altura del triángulo es menor que la base, el área máxima la tendrá la intersección del triángulo con el cuadrado construido en la línea media del triángulo. Pero si la altura del triángulo no es menor que la base, la máxima será el área del cuadrado inscrito en el triángulo.

EJEMPLO 4. En una circunferencia de radio R está inscrito un trapecio del área máxima. Hallen los lados laterales del trapecio si una de las bases es igual a $R\sqrt{3}$.

SOLUCION (fig. 97). 1. La magnitud que optimizamos es el área S del trapecio.

2. Designemos con la letra x el ángulo en la base conocida del trapecio. Con $x = 60°$ el trapecio degenera convirtiéndose en un triángulo regular inscrito. Como sabemos, su lado es igual a $R\sqrt{3}$. Por otro lado, x debe ser menor que 120°, ya que el arco, sobre el que se apoya el ángulo inscrito en la base del trapecio es menor que 240° (fig. 98).

Así, pues, hemos establecido los límites reales para la variable independiente introducida: $60° < x < 120°$.

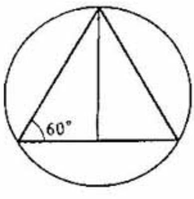


Fig. 97

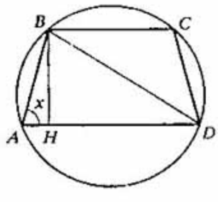


Fig. 98

3. Sabemos, que el área del trapecio $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BH$, donde BH es la altura del trapecio. Pero $AD + BC = (AH + DH) + (AD - 2AH) = 2DH$. Así, pues, $S_{ABCD} = DH \cdot BH$. Expresemos el área S con x y R. Tenemos: $AD = R\sqrt{3}$, $BD = 2R \operatorname{sen} x$, $\angle ABD$ se mide mediante $\frac{1}{2} \cup AD$, es decir, $\angle ABD = 60°$, $\angle BDA = 120° - x$, $BH = BD \cdot \operatorname{sen}(120° - x) = 2R \operatorname{sen} x \times \operatorname{sen}(120° - x)$.

$DH = BD \cos(120° - x) = 2R \operatorname{sen} x \cos(120° - x)$. Por lo tanto, $S = DH \cdot BH = 2R \operatorname{sen} x \cos(120° - x) \cdot 2R \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(120° - x) = 2R^2 \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}(240° - 2x)$.

4. Hallemos el valor máximo de la función $S = 2R^2 \operatorname{sen}^2 x \times \operatorname{sen}(240° - 2x)$ en el intervalo $]60°; 120°[$.

1) $S' = 2R^2 (2 \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{sen}(240° - 2x) - 2 \operatorname{sen}^2 x \times \cos(240° - 2x)) = 4R^2 \operatorname{sen} x (\operatorname{sen}(240° - 2x) \cos x - \operatorname{sen} x \times \cos(240° - 2x)) = 4R^2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(240° - 2x - x) = 4R^2 \operatorname{sen} x \times \operatorname{sen}(240° - 3x)$.

2) En el intervalo $]60°; 120°[$ S' se reduce a cero sólo en el punto $x = 80°$.

3)

x	$60°$	$80°$	$120°$
S	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$	$2R^2 \operatorname{sen}^3 80°$	0

En esta tabla se entiende por $S(120°)$ el $\lim\limits_{x\to 120°} S$. Comparemos los valores $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ y $2R^2 \operatorname{sen}^3 80°$. Supongamos que $2R^2 \operatorname{sen}^3 80° > \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. Entonces, $\operatorname{sen}^3 80° > \frac{\sqrt{3}}{8}$, de donde $\operatorname{sen}^3 80° > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$, es decir, $\operatorname{sen} 80° > \frac{\sqrt{3}}{2}$ o bien que $\operatorname{sen} 80° > \operatorname{sen} 60°$. Esta última desigualdad y, junto con ella, la suposición son ciertas. O sea, el valor máximo de la función S se alcanza con $x = 80°$.

5. Así, pues, el área máxima la tiene el trapecio con ángulo de $80°$ en la base. Ahora hallemos el lado lateral de tal trapecio. Del triángulo ABD (fig. 98), tenemos: $AB = 2R \operatorname{sen}(120° - x)$. Con $x = 80°$ obtenemos: $AB = 2R \operatorname{sen} 40°$.

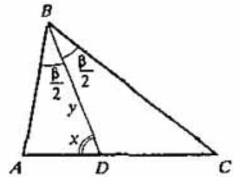


Fig. 99

EJEMPLO 5. Demostremos que de todos los triángulos con la base y el ángulo en el vértice dados la bisectriz máxima del ángulo en el vértice la tiene el triángulo isósceles.

SOLUCIÓN. *I procedimiento.* 1. La magnitud que optimizamos y es la bisectriz BD (fig. 99).

2. De acuerdo con el planteamiento AC y $\angle ABC$ son constantes, hagamos $AC = b$, $\angle ABC = \beta$. Introduzcamos la variable independiente $x = \angle ADB$.

Hallemos los límites reales de variación de x. Por un lado el ángulo x, como exterior para el triángulo BDC, es mayor que cualquier ángulo de este triángulo que no sea adyacente con el ángulo BDA, es decir, $x > \frac{\beta}{2}$. Por otro lado, del triángulo ABD deducimos que $x < \pi - \frac{\beta}{2}$. Así, pues, $\frac{\beta}{2} < x < \pi - \frac{\beta}{2}$.

3. Expresemos BD con x, b y β. Señalemos que $\angle BAD = \pi - x - \frac{\beta}{2}$, $\angle BCD = x - \frac{\beta}{2}$.

Según el teorema de los senos, del triángulo ABC obtenemos: $\frac{AC}{\operatorname{sen} B}=\frac{AB}{\operatorname{sen} C}$, es decir, $\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{AB}{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\beta}{2}\right)}$, de donde hallamos:

$$AB=\frac{b\operatorname{sen}\left(x-\frac{\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\beta}.$$

De modo análogo, según el teorema de los senos, del triángulo ABD obtenemos: $\frac{AB}{\operatorname{sen} D}=\frac{BD}{\operatorname{sen} A}$, es decir, $\frac{AB}{\operatorname{sen} x}=\frac{y}{\operatorname{sen}\left(\pi-x-\frac{\beta}{2}\right)}$,

de donde hallamos:

$$y=\frac{AB\operatorname{sen}\left(x+\frac{\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen} x}=\frac{b\operatorname{sen}\left(x-\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(x+\frac{\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen} x\operatorname{sen}\beta}=$$
$$=\frac{b}{2\operatorname{sen}\beta}\cdot\frac{\cos\beta-\cos 2x}{\operatorname{sen} x}.$$

4. Hallamos el valor máximo de la función $y=\frac{b}{2\operatorname{sen}\beta}\times$ $\times\frac{\cos\beta-\cos 2x}{\operatorname{sen} x}$ en el intervalo $\left]\frac{\beta}{2};\ \pi-\frac{\beta}{2}\right[$.

1) $y'=\frac{b}{2\operatorname{sen}\beta}\cdot\frac{2\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} x-\cos x(\cos\beta-\cos 2x)}{\operatorname{sen}^2 x}=$

$$=\frac{b}{2\operatorname{sen}\beta}\cdot\frac{(\cos 2x\cos x+\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} x)+\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} x-\cos\beta\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}=$$
$$=\frac{b}{2\operatorname{sen}\beta}\cdot\frac{\cos x+2\operatorname{sen}^2 x\cos x-\cos\beta\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}=$$
$$=\frac{b}{2\operatorname{sen}\beta}\cdot\frac{\cos x(1-\cos\beta+2\operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{b\cos x\left(\operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{sen}^2 x\right)}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}^2 x}.$$

2) $y'=0$ si $\cos x=0$, es decir, $\cos x=\frac{\pi}{2}$ (otras soluciones en el intervalo $\left]\frac{\beta}{2};\ \pi-\frac{\beta}{2}\right[$ la ecuación $\cos x=0$ no tiene); y' no existe si $\operatorname{sen} x=0$, pero en el intervalo $\left]\frac{\beta}{2};\ \pi-\frac{\beta}{2}\right[$ esta ecuación no tiene soluciones.

3) Con el fin de elaborar la tabla para hallar el valor máximo de la función, ante todo, calculemos los límites unilaterales de la función que consideramos cos $x\to\frac{\beta}{2}+0$ y con $x\to\pi-\frac{\beta}{2}-0$.

$$\lim_{x\to\frac{\beta}{2}+0}\frac{b(\cos\beta-\cos 2x)}{2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen} x}=\frac{b(\cos\beta-\cos\beta)}{2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}=0,$$

$$\lim_{x\to\pi-\frac{\beta}{2}-0}\frac{b(\cos\beta-\cos 2x)}{2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen} x}=\frac{b(\cos\beta-\cos(2\pi-\beta))}{2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{\beta}{2}\right)}=0.$$

Ahora ya está claro que la función $y(x)$ tiene el valor máximo con $x=\frac{\pi}{2}$. Este valor es igual a:

$$\frac{b}{2\operatorname{sen}\beta}\cdot\frac{\cos\beta+1}{1}=\frac{b\cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2}}{4\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

5. Si $x=\frac{\pi}{2}$, $\angle ADB=90°$. Esto significa que en el triángulo ABC la bisectriz BD es la altura y, por lo tanto, ABC es un triángulo isósceles. Así, pues, de todos los triángulos con la base y el ángulo en el vértice dados, la mayor bisectriz del ángulo en el vértice la tiene un triángulo isósceles.

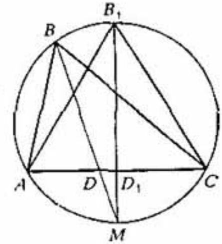


Fig. 100

II procedimiento. Demos la demostración geométrica que, como veremos, por su brevedad y elegancia gana considerablemente en comparación con el primer procedimiento.

Circunscribamos una circunferencia al triángulo ABC con la bisectriz BD (fig. 100). Los vértices de los demás triángulos con la base y el ángulo en el vértice dados yacen en el arco ABC. Tomemos el triángulo isósceles AB_1C, tracemos en él la bisectriz B_1D_1 y demostremos que $BD<B_1D_1$.

Continuemos ambas bisectrices BD y B_1D_1 hasta su intersección con la circunferencia. Ambas cortan a ésta en un mismo punto M, que es el punto medio del arco AC. Como B_1M es el diámetro de la circunferencia, entonces $BM<B_1M$. Del triángulo DD_1M concluimos que $DM>D_1M$. De estas desigualdades se desprende que $BM-DM<B_1M-D_1M$, es decir, que $BD<B_1D_1$.

PROBLEMAS PARA EL TRABAJO INDIVIDUAL

535. Demuestren que en el triángulo rectángulo $\frac{r}{R}\leqslant\sqrt{2}-1$, donde r es el radio de la circunferencia inscrita, R, de la circunscrita.

536. Demuestren que en un triángulo isósceles la razón entre los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita no es mayor de $\frac{1}{2}$.

537. Demuestren que de todos los triángulos con igual ángulo en el vértice y suma constante de los lados iguales, el isósceles tiene la menor base.

538. Demuestren que de todos los triángulos con la base y ángulo en el vértice dados, el isósceles tiene: a) la mayor área; b) el mayor perímetro.

539. Demuestren que de todos los triángulos isósceles, inscritos en la circunferencia dada, el equilátero tiene: a) la menor área; b) el mayor perímetro.

540. El punto A yace entre dos rectas paralelas l_1 y l_2, está alejado de ellas a las distancias a y b y es el vértice del ángulo recto del triángulo rectángulo ABC; el punto B yace en la recta l_1, el C, en l_2. Demuestren que de todos estos triángulos el de catetos $a\sqrt{2}$ y $b\sqrt{2}$ tiene la menor área.

541. En un triángulo está inscrito un rectángulo. Demuestren que el área del rectángulo no es mayor de la mitad del área del triángulo.

542. Demuestren que de todos los paralelogramos, inscritos en el triángulo dado de forma que ellos tengan un ángulo común, el paralelogramo que tiene la mayor área es aquel cuyo vértice divide por la mitad el lado del triángulo opuesto al ángulo común.

543. En el triángulo ABC el área es igual a S y $\angle B = \beta$. Hallen el valor mínimo: a) de la suma de los lados AB y BC; b) del lado AC; c) del perímetro del triángulo.

544. De todos los triángulos isósceles, con largura constante de la mediana trazada al lado lateral, hallen aquel que tiene la mayor área. ¿A qué es igual el ángulo en el vértice de semejante triángulo?

545. En el triángulo ABC con lados a, b y c, los lados AB y AC se han continuado tras los vértices B y C a las distancias AD y AE de forma que $BD + CE = AC$. Hallen AD y AE de modo que el segmento DE sea el mínimo.

546. En el lado AC del triángulo ABC se ha tomado al azar un punto y desde él están bajadas perpendiculares a los lados AB y BC. ¿A qué serán iguales los valores mínimo y máximo de la suma de estas perpendiculares si sabemos que $AB > BC$?

547. Inscriban en el triángulo dado un rectángulo que tenga con el primero el ángulo recto común y la menor diagonal.

548. Una estatua de 4 m de altura está situada sobre una columna de 5,6 m de altura. ¿A qué distancia de la columna ha de encontrarse una persona para que vea la columna bajo el máximo ángulo, si la distancia desde el suelo hasta el nivel de sus ojos es igual a 1,6 m?

549. Los lados laterales y una de las bases de un trapecio son iguales a 15 cm. ¿ Con qué base el área de la figura será la máxima?

550. De un trapecio rectangular con bases a y b y altura h se corta un rectángulo de la máxima área. ¿A qué será igual esta área si: a) $a = 80$ cm, $b = 60$ cm, $h = 100$ cm; b) $a = 24$ cm, $b = 8$ cm y $h = 12$ cm?

551. El lado del cuadrado $ABCD$ es igual a 8 cm. En los lados AB y BC se han tomado los puntos P y E, respectivamente, de modo que $BP = BE = 3$ cm. Hallen en los lados CD y AD los puntos M y K de forma que el trapecio $PEMK$ tenga el área máxima. ¿ A qué es igual el valor máximo del área del trapecio?

552. En el pentágono $ABCDE$ los ángulos A, B y E son rectos, $AB = a$, $AE = b$, $BC = c$ y $DE = m$. Inscribir en el pentágono el rectángulo de área máxima si: a) $a = 7$ cm, $b = 9$ cm, $c = 3$ cm y $m = 5$ cm; b) $a = 7$ cm, $b = 9$ cm, $c = 3$ cm y $m = 4$ cm.

553. En una circunferencia se dan dos puntos: A y B. Hallen en la circunferencia tal punto C que: a) el producto $AC \cdot BC$ sea el máximo; b) la suma $AC + BC$ sea la máxima.

554. a) De todos los sectores con el perímetro P dado hallen aquel que tiene el área máxima.

b) De todos los sectores con el área S dada hallen aquel que tiene el perímetro mínimo.

555. La sección de un túnel tiene forma de rectángulo terminado por arriba en forma de semicírculo. ¿ Con qué radio de éste el área de la sección será la máxima si el perímetro de ésta es igual a P?

556. La cuerda AB está alejada del centro O de la circunferencia de radio R a la distancia h. En el menor de los dos segmentos formados por la cuerda AB inscriban el rectángulo de área máxima.

557. En la circunferencia de radio R está inscrito un trapecio, una de cuyas bases es igual al diámetro. Hallen el área máxima de dicho trapecio.

558. a) Demuestren que de todos los triángulos con el ángulo agudo en el vértice y con la base dados, el triángulo isósceles tiene la máxima mediana trazada a la base.

b) Demuestren que de todos los triángulos con el ángulo obtuso en el vértice y la base dados el triángulo isósceles tiene la mediana mínima trazada a la base.

559. Por el vértice B del triángulo dado ABC se traza la recta l. De los puntos A y C se bajan perpendiculares a dicha recta. Demuestren que la suma de las perpendiculares será la mínima si la recta l es perpendicular a la mediana BM del triángulo ABC.

560. a) De todos los triángulos isósceles del área S dada, hallen aquel en el que se puede inscribir la circunferencia de radio máximo. Calculen su radio.

b) A la circunferencia de radio r circunscriban un triángulo isósceles del área mínima. Hallen esta área.

561. El lado del cuadrado $ABCD$ es igual a 6 cm. En los lados AD y AB se han tomado los puntos K y P de forma que $AK = 3$ cm, $AP = 2$ cm. En el cuadrado está inscrito un trapecio con la base KP. ¿Cuál será el área máxima del trapecio?

562. La cuerda AB es igual al radio de la circunferencia. La cuerda CD se ha trazado paralelamente a AB de modo que el trapecio $ABCD$ tiene el área máxima. Hallen el valor angular del menor de los arcos cortados por la cuerda CD.

Capítulo II

ESTEREOMETRÍA

§ 8 GENERALIDADES SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DE LA REPRESENTACIÓN DE UNA FIGURA DADA

1. En planimetría la representación de la figura dada Φ_0, llamada original, puede ser toda figura Φ semejante a Φ_0.

P. ej., si la figura Φ_0 dada es un triángulo con catetos iguales a 5 y 30 cm, es posible considerar que su representación es cualquier triángulo rectángulo en el que la razón entre sus catetos sea 5 : 30, es decir, un triángulo rectángulo con catetos iguales a 1 y 6 cm.

Hemos de señalar que en la práctica no es siempre sencillo construir la representación de la figura prefijada, incluso con una precisión hasta la semejanza. Así, p. ej., si para resolver el problema es preciso construir la representación de un triángulo rectángulo según la hipotenusa y la bisectriz de uno de los ángulos agudos dados, como ninguno de los ángulos agudos del triángulo es conocido, con el fin de construir su representación hasta la semejanza sería necesario realizar cierta construcción auxiliar, es decir, resolver un nuevo problema. Es natural, que en tales casos se intenta resolver el problema planteado en un dibujo «aproximado» y después de haber hallado la resolución, ejecutar el dibujo con una precisión hasta la semejanza.

2. Cuando se trata de construir la representación de la figura dada en estereometría, el problema es mucho más complicado.

En la geometría descriptiva se han elaborado con detalles diversos métodos para construir las representaciones, en particular, diversos tipos de proyección paralela. No obstante, en las lecciones de geometría en la escuela media, la confección de planos en cierta proyección paralela no está justificada. Al resolver problemas geométricos la construcción de las representaciones de las figuras se realiza en una proyección paralela arbitraria, es decir, la posición del original con relación al plano en el que se efectúa la proyección y la dirección de la propia proyección respecto a dicho plano, son indeterminados. La posibilidad de aplicar este procedimiento de construcción de la representación proyectada se desprende del teorema de Polke—Schwarz, de acuerdo con el cual *todo cuadrilátero plano $ABCD$, junto con sus diagonales, puede ser tomado por la proyección paralela de un tetraedro semejante al tetraedro $A_0B_0C_0D_0$ de forma arbitraria.* Según la representación obtenida durante semejante proyección paralela arbitraria, no es posible restablecer el original, pero al resolver los problemas del curso escolar esto no es necesario.

3. A los dibujos de proyección que se elaboran al resolver problemas en la escuela media se plantean los siguientes requisitos:

1) la representación debe ser *cierta*, es decir, ella debe representar una figura semejante a la proyección paralela del original;

2) la representación, en la medida de lo posible, debe ser *evidente*, es decir, ha de provocar la representación tridimensional de la forma del original (en algunos casos este requisito no se observa. Sobre esto se hablará más abajo);

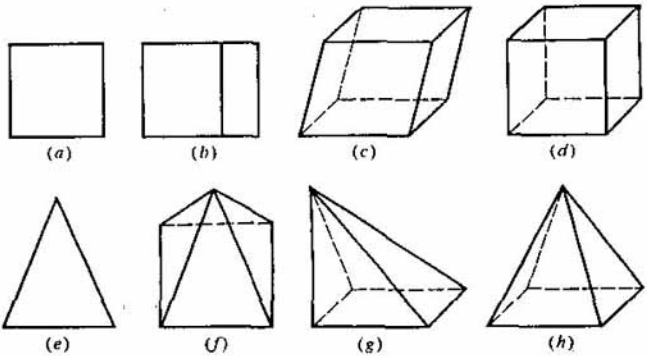


Fig. 101

3) la representación debe *elaborarse con facilidad*, o sea, las reglas de construcción han de ser lo más sencillas posible; una gran cantidad de construcciones auxiliares sólo dificulta la asimilación del contenido del problema.

Hay que distinguir con claridad las nociones de representación cierta y evidente.

La certeza de la representación es una noción matemática rigurosamente determinada, mientras que el concepto de evidencia se refiere a los subjetivos, ya que está relacionado con la percepción individual de la figura representada.

P. ej., todas las mostradas en la fig. 101, *a*, *b*, *c*, *d* son representaciones ciertas de un cubo. Pero nos parece que la evidente es la de la fig. 101, *d*. En la fig. 101, *e*, *f*, *g*, *h* todas las representaciones son las ciertas de una pirámide cuadrangular. La evidente sólo es la mostrada en la fig. 101, *h*.

Para que la representación sea cierta es suficiente construirla en correspondencia con las leyes de la proyección paralela.

4. Con la noción de representación cierta está íntimamente ligado el concepto de plenitud posicional de la representación (o bien, con brevedad, plenitud de la representación). Recibe el nombre de *completa* la imagen de la figura Φ_0 si cada punto A_0, perteneciente a ella, está prefijado en el dibujo de proyección.

Recordemos con brevedad cómo se define esta noción.

El plano α sobre el que se proyectan las figuras que estudiamos, lleva el nombre de *plano de proyección* o bien de *representación* (en realidad es el plano del dibujo), en tanto que la propia proyección sobre el plano α, *exterior*. Con el fin de construir la representación de cierta figura puede realizarse la proyección central o bien paralela. Cuando hablamos de la proyección exterior, en adelante, sólo vamos a tener en cuenta la proyección paralela.

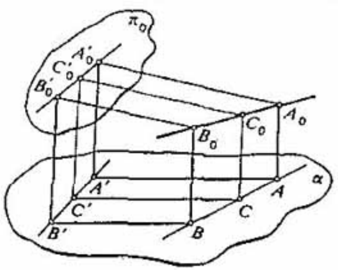


Fig. 102

Examinemos en el espacio cierto plano π_0 distinto de α y una nueva dirección de proyección paralela no paralela al plano π_0; la proyección en la mencionada dirección va a llevar el nombre de *auxiliar* (paralela). Para cada punto A_0 del espacio construimos el punto A_0' que es la proyección del punto A_0 en el plano π_0 (proyección auxiliar) y, a continuación, proyectamos ambos puntos A_0 y A_0' en el plano α (fig. 102).

Obtenemos los puntos A y A' que reciben el nombre de *proyección* y *proyección secundaria* del punto A_0, respectivamente.

La correspondencia $A \to A'$ en el plano de proyección se puede considerar (claro está, de modo convencional) como cierta clase de proyección; se le da el nombre de *interior paralela*, ya que se efectúa dentro del plano de representación. Es evidente, que cualesquiera que sean los puntos A_0, B_0, C_0, . . . en el espacio, en dicho plano: $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel \dots$.

Entendemos por proyección de una figura tridimensional el conjunto de las proyecciones de todos sus puntos.

Con el fin de obtener la proyección de la figura tridimensional Φ_0 (del original) no es obligatorio en el caso general la proyección de cada uno de sus puntos. P. ej., si Φ_0 es un poliedro, él está limitado por un número finito de caras (figuras planas), cada una de éstas está limitada por una quebrada, en la que los eslabones son las aristas del poliedro (segmentos). A su vez, cada arista está limitada con un par de vértices del poliedro. Si hallamos todas las proyecciones de los vértices del poliedro, estarán asimismo determinadas las proyecciones de todas sus aristas y caras, es decir, la proyección del poliedro.

El punto A_0 perteneciente a la figura Φ_0 se llama prefijado en el dibujo de proyección (con brevedad, *prefijado*) si conocemos sus proyecciones y la proyección secundaria, es decir, un par de puntos A y A'.

Así, pues, dos pares de puntos A, A' y B, B' determinan la imagen completa de la recta A_0B_0 a condición de que $AA' \parallel BB'$.

Por analogía, si $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, los pares de puntos A, A'; B, B' y C, C' determinan la imagen completa del plano $A_0B_0C_0$.

Con el fin de fundamentar la plenitud de la representación de algunas figuras, es conveniente considerar la proyección central auxiliar de los puntos A_0, B_0, C_0, . . . de la figura original Φ_0 en el plano π_0. Habiendo realizado dicha proyección y, a continuación, como habitualmente, la proyección exterior (paralela) de los puntos A_0 y A_0', B_0 y B_0', C_0 y C_0', . . . en el plano α, obtenemos las proyecciones y las proyecciones auxiliares de los puntos A_0, B_0, C_0, ... En semejante caso, la correspondencia $A \to A'$ recibe el nombre de proyección *interna central* (claro está, convencionalmente). Es evidente, que cualesquiera que sean los puntos A_0, B_0, C_0, . . . en el espacio, las rectas AA', BB', CC', . . . en el plano de representación se cortan en un mismo punto.

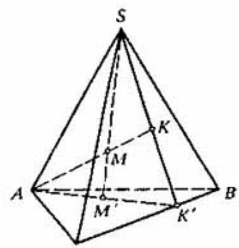


Fig. 103

Ahora, mostremos que si prefijamos las proyecciones de los vértices de la pirámide $S_0A_0B_0C_0$, es decir, los puntos S, A, B y C (sin las proyecciones secundarias), la representación de la pirámide será completa. En efecto, tomando como centro de proyección auxiliar el punto S_0 y como π_0 el plano $A_0B_0C_0$, para cada punto M_0 de la pirámide es posible, según su proyección M, construir su proyección secundaria, o sea, el punto M'. En la fig. 103 tal construcción se ha hecho para el punto M_0 perteneciente al plano $S_0A_0K_0'$. Con ello, cualquier punto del triángulo ABC puede ser considerado como proyección del punto S.

La representación de un cono en forma de una figura constituida por una elipse y un par de tangentes a ella, trazadas desde cierto punto exterior, es completa. Para cerciorarse de ello hay que considerar el cono junto con una pirámide inscrita en él.

5. Si la representación de la figura Φ_0 es completa, en ella es resoluble cualquier problema de posición, es decir, el problema de la construcción de las incidencias de las figuras dadas (p. ej., el pro-

blema de la determinación de los puntos de intersección de la recta prefijada con el plano dado).

6. También está ligada con la representación cierta la noción de su definición métrica.

La representación de la figura Φ_0 se denomina *definida métricamente* si de acuerdo con ella es posible (en principio) restablecer la figura Φ_0 con una precisión hasta la semejanza.

En el caso general, la representación completa no está aún definida métricamente, pero a determinadas condiciones puede convertirse en tal. P. ej., si se indica que el prisma representado en la fig. 101, *d* es regular, su representación no estará aún definida métricamente. Si añadimos adicionalmente que la arista lateral del prisma es dos veces mayor que el lado de la base, se asegurará la definición métrica de la representación.

Recibe el nombre de *condicional* la representación acompañada de tales condiciones que permitan restablecer el original con una precisión hasta la semejanza. Son precisamente las representaciones condicionales las que se emplean en las lecciones de matemáticas en la escuela.

Semejantes condiciones (contenidas en el planteamiento del problema y que, por lo general, se indican con brevedad en la anotación del problema) son muy diversas y dependen, en particular, de la figura que se representa.

P. ej., si en el original la figura Φ_0 es un cubo, es suficiente acompañar su imagen con la condición: la figura Φ es un cubo. En efecto, tal condición, aplicada a la figura Φ, da la posibilidad de restablecer el original con una precisión hasta la semejanza, ya que todos los cubos son semejantes entre sí.

Si la figura Φ_0 es una pirámide cuadrangular regular, es insuficiente acompañar su representación con la condición de que la figura Φ es una pirámide cuadrangular regular, ya que en el caso dado no podemos todavía restablecer el original con una precisión hasta la semajanza. Con el fin de que en este ejemplo la imagen sea definida métricamente, hay que indicar además, p. ej., la razón entre la altura de la pirámide y el lado de la base o bien el ángulo entre la arista lateral y el plano de la base, o bien el ángulo entre la cara lateral y el plano de la base, etc.

7. Las construcciones que se realizan en el dibujo de proyección pueden ser de *posición* y métricas. Las primeras transmiten las propiedades del original que se conservan durante la proyección paralela exterior.

Las construcciones *métricas*, por regla, transmiten las propiedades del original que no se conservan durante la proyección paralela.

Ciertas construcciones que, a primera vista parecen métricas, en un problema concreto pueden convertirse en las de posición. P. ej., la construcción de la altura del triángulo en el caso general es metrica, ya que no se conserva la propiedad de las rectas de ser perpendiculares con la proyección paralela. Pero si en el original los lados A_0B_0 y B_0C_0 del triángulo $A_0B_0C_0$ son iguales, en el original la altura B_0D_0 es al mismo tiempo la mediana, mientras que la propiedad de un segmento de ser mediana de un triángulo con la proyección paralela se conserva y, por lo tanto, la representación de la altura B_0D_0 de dicho triángulo será la mediana BD del triángulo ABC. Así, pues, en el caso que consideramos, la construcción de la representación de la altura es de posición.

8. Con el fin de fundamentar la definición métrica de la representación completa hay que distinguir las propiedades afines y métricas de las figuras. He aquí algunas de ellas.

Propiedades *afines* (se conservan con la proyección paralela):

1) propiedad de la figura de ser un punto, una recta, un plano;

2) propiedad de las figuras de tener intersección;

3) división del segmento en la razón dada;

4) propiedad de las rectas, los planos, la recta y el plano de ser paralelos;

5) propiedad de la figura de ser triángulo, paralelogramo, trapecio;

6) razón de las longitudes de los segmentos paralelos;

7) razón de las áreas de dos figuras.

Propiedades *métricas* (no se conservan con la proyección paralela, pero sí con las transformaciones de la semejanza):

1) propiedad de las rectas (planos, recta y plano) de formar entre sí un determinado ángulo (en particular, ser perpendiculares entre sí);

2) razón entre las longitudes de segmentos paralelos;

3) razón entre los valores de los ángulos entre las rectas (en particular, propiedad de la recta de ser bisectriz de un ángulo);

4) razón entre los valores de los ángulos diedros;

5) razón entre los valores de los ángulos entre las rectas y los planos.

Así, pues, p. ej., la base de un prisma cuadrangular regular, que en el original era un cuadrado, puede ser representada por un paralelogramo arbitrario, ya que la razón entre las longitudes de los lados no paralelos del cuadrado (igual a la unidad) y la perpendicularidad de sus lados adyacentes son propiedades métricas, mientras que el paralelismo de los lados opuestos es una propiedad afín.

En general, un paralelogramo arbitrario, puede ser la representación tanto de un paralelogramo como de un rectángulo, rombo cuadrado.

9. En la representación construida según las reglas de proyección paralela, como es natural, no se advierten las condiciones métricas indicadas en el texto del problema. P. ej., en la representación de un cubo vemos las caras que son paralelogramos y no cuadrados.

Por regla, dichas condiciones se indican aparte, acompañando el dibujo. Completando éste con las condiciones métricas, es como si *consumiéramos los parámetros.*

P. ej., si la fig. Φ_0 es el rombo $A_0B_0C_0D_0$ y el paralelogramo $ABCD$, su representación, acompañando el dibujo de las palabras «$ABCD$ es un rombo» imponemos a la representación una condición métrica o bien, como suele decirse, consumimos un parámetro. En efecto, en el original $A_0B_0 = B_0C_0$, o sea, $A_0B_0 : B_0C_0 = 1 : 1$, pero la razón entre la longitud de los segmentos paralelos no se conserva durante la proyección paralela y, por lo tanto, la igualdad $A_0B_0 = B_0C_0$ expresa una propiedad métrica del original. De modo análogo, al construir en el dibujo un paralelogramo y añadiendo la anotación de que está representado un cuadrado, consumimos dos parámetros.

Cuando con cierta figura Φ, que sólo tiene las propiedades afines de original, representamos la figura Φ_0 no consumimos parámetros, ya que las mencionadas propiedades del original se conservan al efectuar la proyección paralela.

10. *Si al realizar la construcción de la representación de la figura plana Φ_0 se han consumido dos parámetros, de forma unívoca se ha definido la representación de cada punto que yace en el plano de dicha figura* (y, por consiguiente, las restantes construcciones métricas en el plano de la figura Φ, necesarias para resolver el problema, no pueden verificarse de forma arbitraria).

De manera análoga, *si al construir la representación de la figura tridimensional Φ_0 se han consumido cinco parámetros, de este modo se ha definido unívocamente la representación de cada punto del espacio* (y, por lo tanto, en este dibujo las construcciones métricas no se pueden efectuar arbitrariamente).

11. En el proceso de la resolución de un problema estereométrico surge la necesidad de realizar asimismo diversas construcciones adicionales en la representación, p. ej., la construcción del ángulo lineal del diedro dado, el ángulo entre la recta dada y el plano prefijado, la bisectriz de cierto ángulo, etc. Cuando se efectúan construcciones auxiliares hay que tomar en consideración no sólo el número paramétrico de la representación (el número de parámetros consumidos), sino también la llamada región de «las posiciones tolerables».

P. ej., la representación del centro de una circunferencia, inscrita en el triángulo $A_0B_0C_0$, no puede ser elegida sin tener en cuenta la región de representación de dicho centro que, como sabemos de la geometría descriptiva, es una parte del plano situado en el interior del triángulo, cuyos lados son las líneas medias del triángulo ABC.

EJEMPLO 1. Una de las caras de una pirámide triangular es perpendicular al plano de la base. Tanto la cara mencionada como la base de la pirámide son triángulos regulares. Tomando el cuadrilátero arbitrario $SBAC$ y sus diagonales como la representación de la pirámide, hallemos el número paramétrico de la representación.

SOLUCIÓN (fig. 104). La representación del triángluó regular, que yace en la base de la pirámide, con un triángulo arbitrario conduce al consumo de dos parámetros. La representación de la cara, que en el original es un triángulo regular, mediante un triángulo arbitrario (como es natural, un lado de éste es también el lado del triángulo que yace en la base de la pirámide) también conduce al consumo de dos parámetros. Y, por fin, considerando que los triángulos construidos son las representaciones de los triángulos, cuyos planos son perpendiculares en el original, imponemos a la imagen una condición métrica más, es decir, consumimos otro parámetro.

Por fin, considerando que los triángulos construidos son las representaciones de los triángulos, cuyos planos son perpendiculares en el original, imponemos a la imagen una condición métrica más, es decir, consumimos otro parámetro.

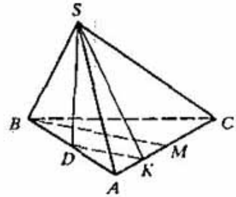


Fig. 104

Así, pues, para representar la pirámide dada se han consumido cinco parámetros, es decir, el número paramétrico de la representación $p = 5$ y, de este modo, en esta representación ya no podemos al azar llevar a cabo construcciones métricas.

OBSERVACIÓN. Para abreviar, en la frase «sea dada la representación de una figura», con frecuencia se omite la palabra «representación» y se escribe, simplemente, «la figura dada».

De modo que está dada la pirámide $SABC$ en la que la cara lateral SAB y la base ABC son triángulos regulares, con la particularidad de que el plano SAB es perpendicular al plano ABC.

Sea más adelante en este ejemplo el lado de la base de la pirámide igual a a y sea preciso hallar el área lateral de la figura.

Está claro que $S_{\Delta SAB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Con el fin de hallar $S_{\Delta SAC}$ es necesario determinar la altura SK del triángulo SAC.

Para resolver el problema hay que efectuar construcciones auxiliares, con la particularidad de que como la imagen es métricamente definida (para ella se han consumido los cinco parámetros), la altura SK no puede trazarse al azar, es decir, no es posible decir «sea $SK \perp AC$» si hemos tomado en AC el punto arbitrario K.

La construcción auxiliar requerida puede efectuarse del modo siguiente. Tracemos la mediana BM del triángulo ABC. Como éste es regular, la mediana es, simultáneamente, la altura, es decir, $BM \perp AC$. Por analogía, al trazar la mediana SD del triángulo

SAB, tenemos: $SD \perp AB$. Es fácil demostrar que el segmento SD es perpendicular al plano ABC. Tracemos $DK \parallel BM$, entonces $DK \perp AC$. Unamos los puntos S y K. Como el segmento SD es perpendicular al plano ABC, DK es la proyección de SK en el plano ABC y, por lo tanto, $SK \perp AC$. Ahora, nos queda por efectuar sencillos cálculos. Hallamos que $SD = BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $DK = \frac{BM}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ y $SK = \frac{a\sqrt{15}}{4}$. Así, pues,

$$S_{\text{lat}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5}).$$

EJEMPLO 2. Del vértice B del triángulo equilátero ABC se ha levantado la perpendicular BK al plano ABC, con la particularidad de que $BK = AB$. Hallen la tangente del ángulo agudo entre las rectas AK y BC.

SOLUCIÓN. Construyamos la representación de la figura dada y hallemos su número paramétrico (fig. 105). Considerando que el triángulo arbitrario ABC es la representación de un triángulo equilátero, consumimos dos parámetros. Considerando que el segmento BK es la representación de la perpendicular al plano ABC, también consumimos dos parámetros y, por fin, teniendo en cuenta que $BK : AB = 1 : 1$, consumimos un parámetro más; así, pues, $p = 5$. De forma que la representación prefijada está métricamente definida y, en adelante, no son tolerables otras construcciones métricas.

Realicemos las siguientes construcciones auxiliares: tracemos en el plano ABC la recta $l \parallel BC$ por el punto A. Entonces, el ángulo entre las rectas AK y BC será igual al ángulo entre las rectas AK y l. Con el fin de hallar el ángulo entre las rectas AK y l es conveniente incluir dicho ángulo en algún triángulo. Operamos del modo siguiente. Del punto K bajamos la perpendicular KD a la recta l. Con ello la recta $KD \perp l$ puede construirse como una oblicua, cuya proyección es perpendicular a l. Para trazar esta recta, es decir BD, es posible hacer uso del hecho que el triángulo ABC es equilátero y, por lo tanto, su mediana AM es asimismo la perpendicular al segmento BC. De este modo, después de construir la mediana AM del triángulo ABC y, seguidamente, $BD \parallel AM$ y segmento DK, obtendremos el triángulo rectángulo ADK. La razón $KD : AD = \operatorname{tg} \angle DAK$ será la buscada.

Haciendo $AB = a$, hallamos: $BK = a$, $BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $DK = \frac{a\sqrt{7}}{2}$, $AD = BM = \frac{a}{2}$ y, por consiguiente, $\operatorname{tg} \angle DAK = \sqrt{7}$, así que la tangente entre las rectas AK y BC también es igual a $\sqrt{7}$.

EJEMPLO 3. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles yace en el plano α y el otro, forma con él un ángulo igual a 45°. Construyamos la representación de la figura dada, hallemos su número paramétrico y, a continuación, el ángulo que forma su hipotenusa con el plano α.

SOLUCIÓN. Considerando que el triángulo arbitrario ABC (fig. 106) es la representación de un triángulo rectángulo, para su representación consumimos un parámetro; suponiendo que AC y BC son las representaciones de segmentos iguales, consumimos un parámetro más; considerando, seguidamente, que BC es la representación de la

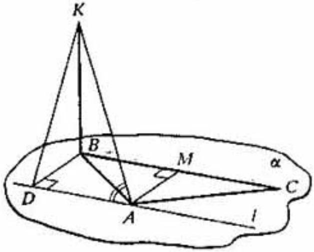


Fig. 105

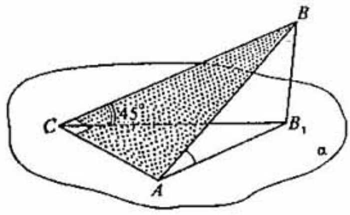


Fig. 106

recta que forma con el plano α un ángulo igual a 45° consumimos asimismo para su representación otro parámetro; así, pues, $p = 3$. Por ello, para las posteriores construcciones métricas, en nuestra representación aún nos quedan parámetros libres.

Ahora, determinemos el ángulo que forma la hipotenusa AB con el plano α. Tomemos en este plano cierto punto B' y consideremos que BB' es la representación de la perpendicular al plano α. De este modo hemos consumido los dos parámetros libres que nos quedaban. La representación está métricamente determinada y, por lo tanto, no podemos efectuar construcciones métricas arbitrarias en la representación obtenida. Por cierto, que en el caso dado esto no es necesario. Construyamos $B'C$ y $B'A$. Hagamos $AC = a$ y, entonces, hallaremos: $BC = a$, $BB' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ y $AB = a\sqrt{2}$.

Así, pues, en el triángulo rectángulo ABB' tenemos: $BB' : AB = 1 : 2$, es decir, $\angle BAB' = 30°$. Pero $BB' \perp \alpha$, o sea, $\angle BAB'$ es el ángulo que forma la hipotenusa AB con el plano α.

OBSERVACIÓN. Eligiendo al azar el punto B', perteneciente al plano α, guiándonos por consideraciones de aumentar la evidencia de la representación obtenida, lo hicimos de forma que la recta BB' sea paralela al borde de la página. Semejante representación provoca la idea de que en el original $B_0B_0' \perp \alpha_0$.

EJEMPLO 4. En una pirámide cuadrangular regular el ángulo entre dos caras laterales vecinas es igual a 2α. Hallemos el ángulo formado por la arista lateral de la pirámide con el plano de su base.

SOLUCIÓN. Está claro que la figura $SABCD$ (fig. 107) es la representación de la pirámide prefijada. Calculemos el número paramétrico de dicha representación. La representación del cuadrado, que es la base de la pirámide dada, por el paralelogramo arbitrario $ABCD$ provoca el gasto de dos parámetros; la representación de la altura de la pirámide por el segmento SO, donde O es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo $ABCD$, conduce al consumo de dos parámetros más, ya que se considera que el segmento SO es la representación de la perpendicular al plano ABC. Así, pues, $p = 4$, es decir, para realizar las posteriores construcciones métricas, requeridas en el proceso de resolución del problema, a nuestra disposición queda un parámetro libre. Para resolver el problema planteado construyamos en la representación el ángulo lineal del diedro dado. Esto puede hacerse, p. ej., del modo siguiente: tomemos al azar en la arista SC el punto M y consideremos que el segmento OM es la representación de la perpendicular levantada del punto O_0 a la arista S_0C_0. Ahora, uniendo el punto M con los puntos B y D, obtenemos el ángulo BMD que, como es fácil mostrar, es la representación del ángulo lineal (el ángulo diedro S_0C_0 en el original).

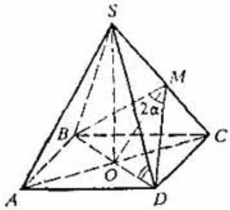


Fig. 107

Aquí, podemos introducir en el dibujo la designación 2α. Como el segmento SO es la representación de la altura de la pirámide, el segmento OD es la representación de la proyección de la arista lateral en el plano de la base de la pirámide y, por consiguiente, el ángulo SDO es la representación del ángulo que buscamos. Es fácil calcular que este ángulo es igual a arcsen (ctg α), donde $45° < \alpha < 90°$.

12. Al resolver ciertos problemas de estereometría resultan ser más cómodas no las representaciones completas, métricamente definidas, sino las simplificadas. Por ejemplo, al resolver los problemas sobre la combinación de poliedros y cuerpos redondos, eligiendo una sección idónea para la construcción de la combinación de los cuerpos, es posible mostrar en dicha representación la figura obtenida en la sección con una precisión hasta la semejanza.

P. ej., en lugar de la representación de una pirámide cuadrangular regular y de la esfera inscrita en ella podemos dar la imagen de la figura obtenida en la sección de esta combinación de un cuerpo por un plano que pasa por la altura de la pirámide, paralelo al lado de la base. Esta sección es un triángulo isósceles, cuyos lados laterales son las apotemas de la pirámide. Como el centro de la esfera yace en la altura de la pirámide, la sección de la esfera por dicho plano será la circunferencia de un gran círculo. Como la esfera es tangente a las caras de la pirámide, su centro yace en el plano bisectriz de los planos de las caras opuestas. Pero el plano bisectriz corta las otras dos caras por las apotemas.

Así, pues, la circunferencia obtenida en la sección es tangente a los lados laterales del triángulo isósceles. Por analogía, dicha circunferencia es también tangente a la base del triángulo. Así, pues, en la sección obtenemos un triángulo isósceles con una circunferencia inscrita en él.

13. En ocasiones, al construir el dibujo es conveniente realizar la construcción empezando «por el final».

EJEMPLO 5. En una pirámide cuadrangular regular está inscrito un cubo de modo que cuatro de sus vértices se encuentran en la base de la pirámide y los otros cuatro, en sus aristas laterales. Construyamos la representación de la figura dada.

SOLUCIÓN. Sea $ABCDA_1B_1C_1D_1$ la imagen del cubo (fig. 108). Hallemos los centros de las bases del cubo, es decir, los puntos O y O_1. Tracemos la recta OO_1 y tomemos el punto S (fuera del cubo). Seguidamente, tracemos las rectas SA_1, SB_1, SC_1, SD_1 y hallemos los puntos P, Q, R, N. Éstos son los vértices de la base de la pirámide. Entonces, $SPQRN$ es la imagen de la pirámide prefijada.

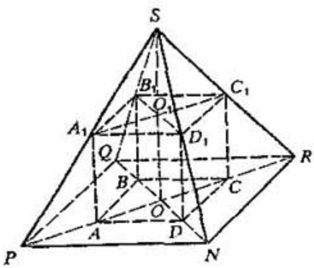


Fig. 108

14. Como conclusión del presente apartado señalemos lo siguiente. Si en el problema se trata de la construcción de una figura que requiere el consumo de no más de cinco parámetros, en el proceso de la resolución la construcción de la representación no se describe (no obstante, es preciso construirla). En semejantes casos sólo hay que cerciorarse de la plenitud de la construcción de la representación y se calcula su número paramétrico. Semejante cálculo es necesario, ya que en el proceso de la resolución pueden ser necesarias construcciones auxiliares de carácter métrico que, al haber parámetros libres podrían realizarse de modo arbitrario (teniendo en cuenta las limitaciones concretas durante la realización de dichas construcciones).

Si en el problema se trata de una figura cuya construcción requiere el consumo de más de cinco parámetros, aquella parte de la construcción de la representación, para la que se requieren cinco parámetros, no se describe; las posteriores construcciones necesarias se describen obligatoriamente y se efectúan en correspondencia con las reglas de la proyección paralela.

Si en el problema se estipula que hay que construir algunos elementos de la figura dada (p. ej., la sección de la pirámide dada) la construcción de la representación de dichos elementos de la figura dada se describe obligatoriamente. Claro está, que durante la construcción se lleva a cabo el cálculo del número paramétrico de la representación que se obtiene (tales ejemplos se estudian en el § 12 del capítulo II). En algunos casos, la descripción de esta construcción se realiza según el esquema completo de resolución del problema sobre la construcción (análisis, construcción, demostración, investigación), en algunos otros casos se limitan a la descripción de etapas por separado de este esquema, p. ej., la descripción de la construcción y la demostración o bien la construcción y la investigación, etc.

§ 9. CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS EN EL ESPACIO

1. Construcciones más sencillas en el espacio

EJEMPLO 1. Tracemos por el punto dado A un plano paralelo al plano dado P.

SOLUCIÓN. *Análisis.* Sea Q el plano que buscamos (fig. 109). Construyamos en el plano Q dos líneas diferentes l y m que pasan por el punto A, en tanto que en plano P tomamos el punto A_1. Construyamos los planos L y M que pasan por el punto A_1 y la recta l y por el punto A y la recta m, correspondientemente. Como la recta l yace en el plano Q y $Q \parallel P$, $l \parallel P$. Pero, entonces, el plano L cruza el plano P por la recta l_1 paralela a l. Por analogía, M cruza el plano P por la recta $m_1 \parallel m$.

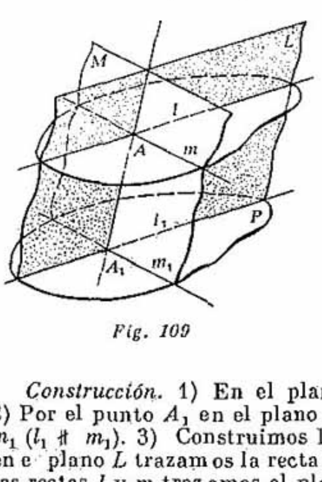


Fig. 109

Como Q se determina unívocamente con las rectas l y m, podemos reducir el problema a la construcción de las rectas l y m que pasan por el punto A y que son paralelas al plano P.

Construcción. 1) En el plano P tomamos al azar el punto A_1. 2) Por el punto A_1 en el plano P trazamos las rectas arbitrarias l_1 y m_1 ($l_1 \nparallel m_1$). 3) Construimos los planos L y M. 4) Por el punto A en el plano L trazamos la recta $l \parallel l_1$ y en el plano M, $m \parallel m_1$. 5) Por las rectas l y m trazamos el plano Q.

Demostración. Como de acuerdo con la construcción $l \parallel l_1$ y la recta l_1 yace en el plano P, $l \parallel P$. De modo análogo, $m \parallel P$. Entonces, el plano Q, que pasa por las rectas l y m, será paralelo al plano P, así como pasará por el punto A. Esto significa, el plano Q es el buscado.

Investigación. El problema tiene una sola solución. En efecto, supongamos lo contrario, es decir, que, además, existe el plano Q_1 que no coincide con Q, pero que es paralela al plano P y que pasa por el punto A. En tal caso, el plano L cruzará este plano Q_1 por la recta l_2 paralela a l. Pero esto significa que en el plano L, por el punto A, pasarán dos rectas l y l_2 paralelas a l_1, lo que contradice el axioma acerca de las paralelas. La contradicción obtenida nos muestra que el problema tiene la única solución. En particular, si el punto A dado yace en el plano P, los planos Q y P coinciden.

II. Lugares geométricos de puntos

EJEMPLO 2. Hallemos el lugar geométrico de los puntos del espacio equidistantes de los planos P_1 y P_2 secantes dados.

SOLUCIÓN. 1) Sea que el punto M es equidistante de los planos P_1 y P_2 (fig. 110). Construyamos el plano Q que pasa por el punto M y es perpendicular a la recta a que es la línea de intersección de los planos P_1 y P_2. Para ello, del punto M bajamos la perpendicular ML al punto a y, a continuación, en el plano P_1, por el punto L, trazamos la recta $l_1 \perp a$. El plano determinado con las rectas LM y l_1 (plano Q) será perpendicular a la recta a. A continuación, construimos la recta l_2 por la que se intersecan los planos P_2 y Q. Entonces, $l_2 \perp a$. A continuación, del punto M bajamos las perpendiculares MM_1 a la recta l_1 y MM_2 a la recta l_2. Como $a \perp l_1$ y $a \perp LM$, $a \perp MM_1$ o bien $MM_1 \perp a$. Pero de lo que $MM_1 \perp a$ y $MM_1 \perp l_1$

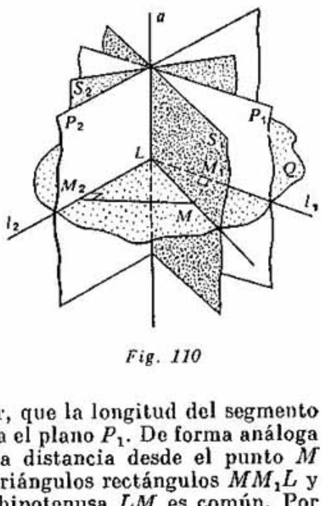


Fig. 110

se desprende que $MM_1 \perp P_1$, es decir, que la longitud del segmento MM_1 es la distancia del punto M hasta el plano P_1. De forma análoga la longitud del segmento MM_2 es la distancia desde el punto M hasta el plano P_2. Entonces, en los triángulos rectángulos MM_1L y MM_2L $MM_1 = MM_2$ y en ellos la hipotenusa LM es común. Por ello, el $\triangle MM_1L = \triangle MM_2L$, lo que significa que $\angle MLM_1 = \angle MLM_2$. Pero, de acuerdo con la construcción, $\angle MLM_1$ es el ángulo lineal del ángulo diedro M_1aM y, por analogía, $\angle MLM_2$, el ángulo lineal del ángulo diedro M_2aM. Así, pues, los ángulos diedros M_1aM y M_2aM son iguales, es decir, el semiplano determinado por el punto M y la recta a es, ni más ni menos, el semiplano bisector del ángulo diedro M_1aM_2. De modo que si el punto M está igualmente alejado de dos planos secantes P_1 y P_2, él pertenece al semiplano bisector del ángulo diedro formado por dichos planos.

Pero los planos secantes P_1 y P_2 forman cuatro ángulos diedros y, por consiguiente, el lugar geométrico de todos los puntos M es el par de planos S_1 y S_2, donde S_1 es la unión de dos semiplanos bisectores de un par de ángulos verticales formados con los planos P_1 y P_2, mientras que S_2, la unión de dos semiplanos bisectores con otro par de ángulos verticales formados con P_1 y P_2.

2) Sea que el punto M pertenece a cierto semiplano bisector de los ángulos diedros formados por la intersección de P_1 y P_2. Construyamos el plano Q que pasa por M y es perpendicular a a, para lo que del punto M bajamos la perpendicular ML a a y, a continuación, por el punto L trazamos $l_1 \perp a$.

El plano Q se determina con las rectas l_1 y LM. Seguidamente, construimos en el plano Q la recta l_2 que pasa por el punto L, con la particularidad de que $l_2 \perp a$ y del punto M bajamos las perpendiculares $MM_1 \perp l_1$ y $MM_2 \perp l_2$. Examinando los triángulos rectángulos MLM_1 y MLM_2 en los que $\angle MLM_1 = \angle MLM_2$, ya que el rayo LM es la bisectriz del ángulo lineal M_1LM_2 y el segmento LM es la hipotenusa común de dichos triángulos, llegamos a la conclusión de que $MM_1 = MM_2$. Así, pues, si el punto M pertenece al semiplano bisector de cualesquiera de los cuatro ángulos diedros formados por los planos P_1 y P_2, él está alejado a una misma distancia de dichos planos.

Así, pues, el lugar geométrico de los puntos buscado es la unión de los semiplanos bisectores de los cuatro ángulos diedros formados por los planos P_1 y P_2, es decir, la unión de los planos S_1 y S_2.

OBSERVACIÓN. Sería posible mostrar que $S_1 \perp S_2$. Sea el lector el que lo haga por sí solo.

III. Aplicación de ciertos lugares geométricos de puntos y rectas

EJEMPLO 3. Construyamos el lugar geométrico de los puntos pertenecientes al plando dado P y equidistantes de los puntos dados A y B que no yacen en el plano P.

SOLUCIÓN. *Análisis.* Sea que el punto M (fig. 111) pertenece al lugar geométrico de puntos que buscamos. Como $AM = BM$, el punto M pertenece al plano Q que pasa por C, que es el punto medio del segmento AB, y es perpendicular al segmento AB. Como, además de esto, el punto M yace en el plano P, el lugar geométrico de los puntos es la línea de intersección de los planos P y Q. Designemos dicha línea con l. De lo que $AB \perp Q$ y que l yace en el plano Q se desprende que $AB \perp l$. Sea $AA_1 \perp P$, $BB_1 \perp P$ y l interseca A_1B_1 en el punto D. Entonces, $AB \perp CD$ y, por lo tanto, asimismo $A_1B_1 \perp$ $\perp l$ o bien $l \perp A_1B_1$.

Así, pues, el problema puede reducirse a la construcción de la recta l que pasa en el plano P por el punto D y es perpendicular a la recta A_1B_1.

Construcción. 1) Construyamos $AA_1 \perp P$ y $BB_1 \perp P$. 2) Construyamos A_1B_1. 3) Hallemos C que es el punto medio del segmento AB. 4) En el plano que pasa por los puntos A, A_1 y B, por el punto C, trazamos la recta $n \perp AB$. 5) Hallemos el punto D en el que se cortan las rectas n y A_1B_1. 6) En el plano P construimos la recta $l \perp$ $\perp A_1B_1$ que pasa por el punto D. 7) Construyamos el plano Q que pasa por las rectas l y n.

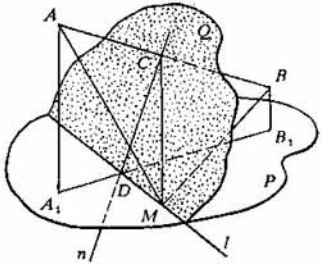


Fig. 111

Demostración. Si el punto M yace en la recta l, él yace también en el plano P. Unamos el punto M con los puntos A, B y C. Como $AB \perp Q$ y la recta CM se encuentra en el plano Q, $AB \perp CM$. Además, $AC = BC$. Entonces, el $\triangle ACM = \triangle BCM$ (por dos catetos) y, por ello, $AM = BM$. De este modo, la recta l es el lugar geométrico de puntos buscado.

Investigación. La existencia de la solución depende de la disposición mutua de la recta AB y el plano Q.

1) Si $AB \perp P$, entonces como $AB \perp Q$, resulta que $Q \parallel P$, es decir, en semejante caso no hay solución.

2) Si AB no es perpendicular a P, la recta l, por la que los planos P y Q se intersecan, es el lugar geométrico de puntos buscado.

IV. Construcciones en las representaciones

Para abreviar acordaremos que en las enunciaciones de los ejemplos de este apartado y el planteamiento de los problemas que han de ser resueltos independientemente por el lector, vamos a omitir por doquier el vocablo «representación». P. ej., en lugar de escribir: el triángulo ABC es la representación del triángulo $A_0B_0C_0$, en el que $A_0B_0 : B_0C_0 = 2 : 3$, escribiremos de modo más corto: en el triángulo ABC $AB : BC = 2 : 3$. De la misma manera, en lugar de los vocablos «construir la representación de la bisectriz del ángulo $A_0B_0C_0$» vamos a escribir: «construir la bisectriz del ángulo ABC».

Asimismo acordemos ahora que en este apartado emplearemos en las designaciones de la figura-original el subíndice «cero». Así, al decir que en el triángulo $A_0B_0C_0$ se ha construido la mediana A_0M_0 se tiene en cuenta que la mencionada construcción se ha realizado en el original, con ello, en nuestra representación tendremos el triángulo ABC y en él estará construida la mediana AM. Consideremos ejemplos.

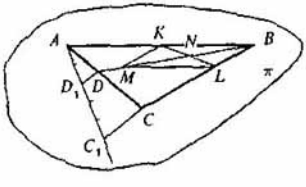


Fig. 112

EJEMPLO 4. En el triángulo ABC $AB : BC = 2 : 3$. Construyamos la bisectriz del ángulo ABC.

SOLUCIÓN. *I procedimiento.* Si el segmento BD es la representación de la bisectriz B_0D_0 del ángulo $A_0B_0C_0$ (fig. 112), $AD : DC = AB : BC$, es decir, $AD : DC = 2 : 3$. Así, pues, después de construir el punto D en el lado AC de modo que $AD : DC = 2 : 3$, obtenemos BD que será la representación buscada de la bisectriz (en la fig. 112 se muestra la construcción del punto D con ayuda del rayo auxiliar AC_1, en el que $AD_1 : D_1C_1 = 2 : 3$).

II procedimiento. En los lados AB y BC hallamos, respectivamente, los puntos K y L tales que $BK = \frac{1}{2}AB$ y $BL = \frac{1}{3}BC$ (fig. 112.) Entonces el triángulo BLK es la representación del triángulo isósceles $B_0L_0K_0$ y, por lo tanto, la mediana BN del triángulo BLK es la representación de la bisectriz del ángulo $A_0B_0C_0$.

III procedimiento. Como con el segundo procedimiento, hallemos los puntos K y L y, a continuación, construyamos $KM \parallel BC$ y $LM \parallel AB$ (fig. 112). Entonces el paralelogramo $BLMK$ es la representación de un rombo y el segmento BM, la de la diagonal del rombo que, como sabemos, divide por la mitad el ángulo de la mencionada figura. Así, pues, la semirrecta B_0M_0 contiene la bisectriz del ángulo $A_0B_0C_0$. Al hallar el punto D, que es la intersección de la semirrecta BM con el lado AC del triángulo ABC, obtenemos el segmento BD que es la representación de la bisectriz buscada.

OBSERVACIÓN. Para representar el triángulo $A_0B_0C_0$ sólo hemos consumido un parámetro ($A_0B_0 : B_0C_0 = 2 : 3$). Por ello, para realizar las construcciones métricas aún tenemos cierta libertad (en reserva, un parámetro). No obstante, al construir la representación de la bisectriz del ángulo $A_0B_0C_0$, tomando en el segmento AC el punto arbitrario D, no podemos decir que el segmento BC es la representación de la bisectriz del ángulo $A_0B_0C_0$ y que al representar, p. ej., la bisectriz del ángulo $B_0A_0C_0$, tomando al azar en el segmento BC el punto E, no es posible considerar que el segmento AE es la representación de la bisectriz del ánaglo $B_0A_0C_0$.

EJEMPLO 5. En la diagonal BD de la base de un prisma cuadrangular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se ha tomado el punto P. Construyamos la sección del prisma con el plano que pasa por la recta CP paralela a la recta A_1B.

SOLUCIÓN. Sea α el plano de la sección buscada (fig. 113). Como $A_1B \parallel \alpha$, el plano β, que pasa por la recta A_1B sin ser paralelo a α, interseca a éste por una recta paralela a A_1B. Tracemos el plano BA_1D por la recta A_1B y por cierto punto P de la recta CP. Designemos este plano con β. A continuación, hallemos la recta por la que β interseca al plano AA_1D_1. Es evidente, que ella será la recta A_1D,

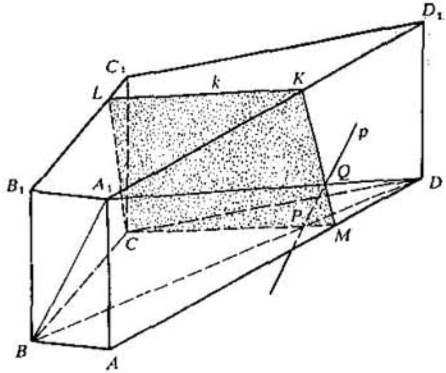


Fig. 113

ya que ambos puntos A_1 y D yacen tanto en el plano β como en AA_1D_1. Tracemos por el punto P del plano β la recta $p \parallel A_1B$ y hallemos el punto Q de intersección de la recta p con la recta A_1D.

El plano α de la sección se determina ahora con las rectas CM (M es el punto de intersección de las rectas CP y AD) y PQ. Como ambos puntos M y Q yacen tanto en el plano α como en el plano AA_1D_1, dichos planos se intersecan por la recta MQ. Seguidamente, hallemos el punto K que es el de intersección de las rectas MQ y A_1D_1. Como los planos ABC y $A_1B_1C_1$ son paralelos, también lo son las rectas por las que ellos se intersecan con el plano secante α. Así, pues, en el plano $A_1B_1C_1$ tracemos por el punto K la recta k paralela a CM y unimos el punto L, que es el de intersección de la recta k con la B_1C_1, con el punto C. El cuadrilátero $CMKL$ es la sección buscada.

Investigación. Como el punto A_1 no yace en el plano ABC, las rectas A_1B y CP se cruzan y, por lo tanto, el plano secante α es el único. En función de la posición del punto P en la diagonal BD y del tipo del prisma dado, la sección puede tener una forma distinta de la mostrada en la fig. 113. En la fig. 114 se muestran algunos tipos de secciones.

EJEMPLO 6. En el paralelepípedo rectangular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 2$. Bajemos una perpendicular del punto A_1 a la diagonal B_1D.

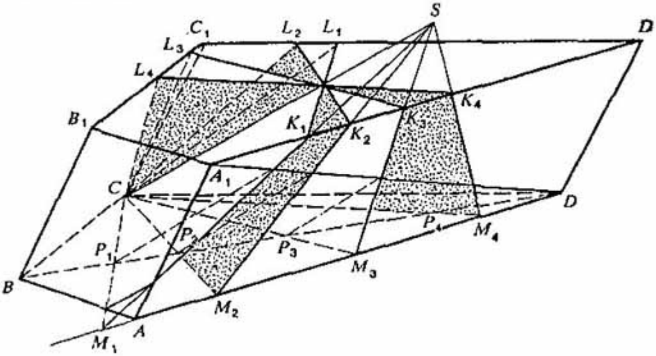


Fig. 114

SOLUCIÓN. Advirtamos que la representación del paralelepípedo dado (fig. 115) es completa y está métricamente determinada. En efecto, considerando el paralelogramo $ABCD$ como la representación de un rectángulo, para representarlo consumimos un parámetro. Considerando que los segmentos arbitrarios AB y AD son tales que $AB : AD = 1 : 2$, consumimos un parámetro más. Suponiendo a continuación, que el segmento AA_1 es la representación de la perpendicular al plano ABC, consumimos para ello dos parámetros y, por fin, considerando que $AD : AA_1 = 1 : 1$, consumimos otro parámetro. Así, pues, para la representación del paralelepípedo dado hemos consumido un total de cuatro parámetros, es decir, la representación es métricamente determinada. Pero, entonces, tomando al azar en B_1D el punto L, no podemos considerar que A_1L es la representación de la perpendicular a B_1D.

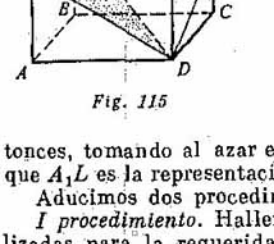


Fig. 115

Aducimos dos procedimientos para construir $A_1L \perp B_1D$.

I procedimiento. Hallemos las dependencias que pueden ser utilizadas para la requerida construcción. Suponiendo que $AB = a$, obtenemos: $AD = 2a$, $AA_1 = 2a$. Entonces, del triángulo rectángulo

AA_1D obtenemos que $A_1D = 2a\sqrt{2}$ y del triángulo rectángulo A_1B_1D — $B_1D = 3a$. Ahora calculamos en qué razón la perpendicular buscada A_1L dividirá el lado B_1D del triángulo rectángulo A_1B_1D. De la semejanza de los triángulos rectángulos A_1B_1L y A_1B_1D, tenemos: $\frac{B_1L}{A_1B_1} = \frac{A_1B_1}{B_1D_1}$, de donde $B_1L = \frac{a}{3}$.

Así, pues, $B_1L : B_1D = \frac{a}{3} : 3a$, es decir, $B_1L : B_1D = 1 : 9$. Como durante la proyección paralela la razón de las longitudes de los segmentos paralelos se conserva en la representación construida, lo mismo que en original, la base L de la perpendicular busada debe dividir el segmento B_1D en una razón $B_1L : B_1D = 1 : 9$.

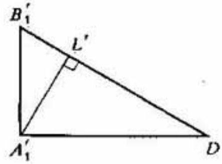


Fig. 116

Ahora, realicemos la construcción. En cierto rayo, cuyo origen es el punto B_1, p. ej., en el rayo B_1C_1, disponemos 9 segmentos iguales entre sí y por el punto M, que es el extremo del primer segmento, trazamos una recta paralela a KD. Entonces, L es el punto de intersección de la recta construida y B_1D, será la base de la perpendicular buscada.

II procedimiento. Hagamos uso del llamado dibujo auxiliar. Construyamos en él triángulo $A_1'B_1'D'$ semejante al original (prototipo) del triángulo A_1B_1D (fig. 116), es decir, un triángulo con ángulo recto en el vértice A_1' y con una razón entre los catetos $A_1'B_1' : A_1'D' = 1 : 2\sqrt{2}$.

(Esta razón se desprende de que según el planteamiento $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 2$, es decir, si $AB = a$, $AD = AA_1 = 2a$ y entonces, $A_1D = 2a\sqrt{2}$. Por lo tanto, $AB : A_1D = a : 2a\sqrt{2}$ o bien $AB : A_1D = 1 : 2\sqrt{2}$).

En el triángulo $A_1'B_1'D'$ del vértice A_1' bajamos la perpendicular $A_1'L'$ al lado $B_1'D'$. El punto L' divide el segmento $B_1'D'$ en cierta razón: $B_1'L' : B_1'D'$. En esa misma razón dividimos el segmento B_1D con el punto L.

Como vemos, al construir el punto L con ayuda del segundo procedimiento no es preciso calcular la razón $B_1L : B_1D$.

EJEMPLO 7. En el paralelepípedo recto $ABCDA_1B_1C_1D_1$ la base es un paralelogramo con ángulo agudo de 60° y una razón entre los lados $AB : AD = 3 : 4$. Construyamos el plano que pasa por la arista AA_1 perpendicular al plano diagonal B_1BDD_1.

SOLUCIÓN (fig. 117). Es evidente que si desde cualquier punto de la recta AA_1 se baja la perpendicular m al plano BDD_1, el plano determinado con las rectas AA_1 y m, será perpendicular al plano B_1BDD_1, es decir, es el buscado.

Supongamos que trazamos la recta m por el punto A. Como el paralelepípedo dado es recto, la recta BB_1 será perpendicular a toda recta yaciente en el plano de la base, es decir, es conveniente trazar la recta m al plano de la base. Con esto, ya que la recta m debe ser perpendicular al plano diagonal B_1BDD_1 debe tener lugar $m \perp BD$. Así, pues, el problema de la construcción del plano perpendicular al plano B_1BDD_1 se reduce, prácticamente, al problema de la construcción de la recta m que pasa por el punto A y que es perpendicular a BD. ¿Es posible que podamos tomar en la recta BD el punto arbitrario L y considerar que $AL \perp BD$? Para responder a esta pregunta hay que calcular p, es decir, el número paramétrico de la representación de la base del paralelepípedo. Si $p = 2$, es decir, la representación está métricamente definida, el punto L no se puede tomar al azar. Así, pues, calculemos los parámetros cousumidos para la representación. El cuadrilátero $ABCD$ se considera que es la representación de un paralelogramo: esta suposición no provoca el consumo de parámetros, ya que durante la proyección paralela el paralelismo se conserva. No obstante, la razón de las longitudes de los segmentos paralelos con la proyección paralela no se conserva, es decir, considerando que los segmentos AB y AD, que hemos tomado al azar, son precisamente tales que $AB : AD = 3 : 4$, consumimos un parámetro. Del mismo modo que el valor del ángulo no se conserva con la proyección paralela, el hecho de que consideremos que el ángulo BCD es la representación de un ángulo igual a 60°, acarrea el consumo de un parámetro más.

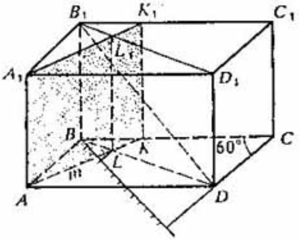


Fig. 117

Así, pues, el número paramétrico de la representación de la base del paralelepípedo $p = 2$, es decir, ningunas otras suposiciones de carácter métrico (es decir, suposición acerca de la presencia de propiedades que no se conservan con la proyección paralela) no se deben tomar. De este modo, el punto L, que es la base de la perpendicular bajada del punto A a la recta BD, no se puede tomar al azar. Su construcción sólo se puede efectuar después de calcular la razón $BL : BD$.

Al realizar dichos cálculos hacemos $AB = 3a$ y, entonces, $AD = 4a$. A continuación, según el teorema de los cosenos $BD = a\sqrt{13}$ y de la ecuación $AB^2 - BL^2 = AD^2 - (BD - BL)^2$ hallamos que $BL = \frac{3a}{\sqrt{13}}$. En tal caso, $BL : BD = 3 : 13$. Después de construir el punto L (con ayuda del rayo auxiliar en el que hemos dispuesto 13 segmentos iguales) trazamos por él la recta $LL_1 \parallel BB_1$ y, seguidamente, el plano buscado (en la fig. 117 éste es el plano AKK_1A_1).

OBSERVACIÓN. Como en el anterior ejemplo, la construcción $AL \perp BD$ se podría haber hecho (véase el II procedimiento) con ayuda de un dibujo auxiliar (fig. 118). Construyamos, precisamente, el triángulo $A'B'D'$ semejante al original (prototipo) del triángulo ABD, es decir, un triángulo con ángulo en el vértice A' igual a 60° y razón entre los lados $A'B' : A'D' = 3 : 4$. En este triángulo del vértice A' bajamos la perpendicular $A'L'$ al lado $B'D'$. El segmento $B'D'$ se divide en el punto L' en cierta razón $B'L' : B'D'$. En esta misma razón divide el punto L el segmento BD.

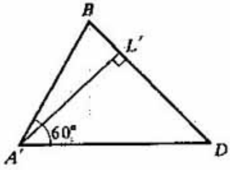


Fig. 118

EJEMPLO 8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ es un cubo. En él se ha construido la sección que pasa por el vértice B y los puntos P y Q que son los puntos medios de las aristas A_1B_1 y B_1C_1. Bajemos del vértice D una perpendicular a dicho plano.

SOLUCIÓN. Como la representación del cubo (fig. 119) es completa y métricamente determinada (para dicha representación se consumen 5 parámetros), tomando al azar en el plano PQB el punto N, no podemos decir que DN es perpendicular al plano PQB. Con el fin de construir la perpendicular buscada, construyamos primero el plano diagonal BB_1D_1 del cubo. Los planos BB_1D_1 y PQB son perpendiculares entre sí. En efecto, PQ es la línea media del triángulo $A_1B_1C_1$, por ello $PQ \parallel A_1C_1$ y, por lo tanto, $PQ \perp B_1D_1$. Además, como $BB_1 \perp A_1B_1$ y $BB_1 \perp B_1C_1$, $BB_1 \perp PQ$ o bien $PQ \perp BB_1$. Así, pues, $PQ \perp B_1D_1$ y $PQ \perp BB_1$, o sea, PQ es perpendicular al plano

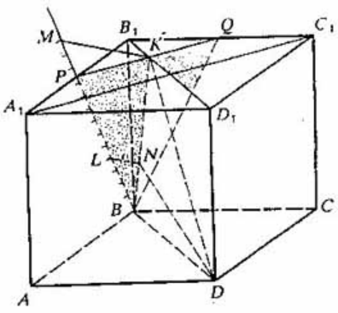


Fig. 119

BB_1D_1 y, entonces, asimismo el plano PQB, que pasa por PQ, también será perpendicular al plano BB_1D_1. Pero como los planos BB_1D_1 y PQB son perpendiculares entre sí, la perpendicular bajada del punto D a la línea de intersección de los mencionados planos será la perpendicular buscada. La línea de intersección de los planos BB_1D_1 y PQB es fácil de hallar: es la recta BK que pasa por los puntos comunes B y K de dichos planos.

Así, pues, realicemos las construcciones necesarias en el plano diagonal BB_1D_1. Como en el anterior ejemplo éstas pueden realizarse con dos procedimientos.

I procedimiento. Sea $AB=a$. Calculemos los lados del triángulo BKD. $BD=a\sqrt{2}$, del triángulo BB_1K $BK=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$ y del triángulo rectángulo DD_1K $DK=BD\frac{a\sqrt{34}}{4}$. Si $DN\perp BK$, $DB^2-BN^2=$ $=DK^2-KN^2$ o bien $DB^2-BN^2=DK^2-(BK-BN)^2$, de donde $BN=\frac{a\sqrt{2}}{3}$. Así, pues, $BN:BK=\frac{a\sqrt{2}}{3}:\frac{3a\sqrt{2}}{4}$, es decir, $BN:BK=4:9$. Como con la proyección paralela la razón da las longitudes de los segmentos paralelos se conserva, en la representación, lo mismo que en el original, el punto N, que es la base de la perpendicular que buscamos, dividirá BK en la razón $BN:BK=4:9$. La construcción del punto N mediante el rayo auxiliar BP se muestra en la fig. 119.

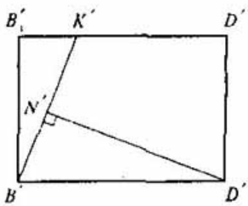


Fig. 120

II procedimiento. Dirijámonos al dibujo auxiliar. Construyamos un rectángulo semejante al original del rectángulo BB_1D_1D, es decir, el rectángulo $B'B_1'D_1'D'$ con una razón de los lados $B'B_1':$ $:B_1'D_1'=1:\sqrt{2}$ (fig. 120). Después, en el lado $B_1'D_1'$ construimos el punto K' de modo que $B_1'K':$ $:B_1'D_1'=1:4$ y unimos los puntos B' y K'. A continuación, del punto D' bajamos la perpendicular $D'N'$ al lado $B'K'$ del triángulo $B'K'D'$. El segmento $B'K'$ se divide con el punto N' en cierta razón. En ella misma el punto N divide el segmento BK.

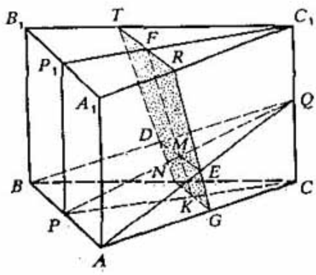


Fig. 121

EJEMPLO 9. En las aristas AB y CC_1 del prisma triangular regular $ABCA_1B_1C_1$, en el que $AA_1:AB=$ $=1:2$, se toman, respectivamente, P y Q que son los puntos medios de dichas aristas. Construyamos el lugar geométrico de los puntos que yacen en las superficies del prisma y equidistantes de los puntos P y Q.

SOLUCIÓN (fig. 121). La representación del prisma dado es completa y métricamente definida (en efecto, considerando que el triángulo arbitrario ABC es la representación del triángulo regular en el original, consumimos dos parámetros para la representación; considerando que el segmento AA_1 es la representación de la perpendicular al plano, consumimos dos parámetros más y, por fin, suponiendo que los segmentos AA_1 y AB son las representaciones de los segmentos, cuyas longitudes en el original corresponden a la razón 1 : 2, consumimos un parámetro). Así, pues, para la representación hemos consumido los cinco parámetros. Por ello, en la representación ya no podemos realizar construcciones métricas de forma arbitraria.

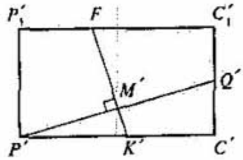


Fig. 122

Señalemos después que el lugar geométrico de puntos que buscamos pertenece a cierto plano que pasa por M, punto medio del segmento PQ, y que es perpendicular a éste. Así, pues, el problema se reduce a la construcción de la sección del prisma con el plano, que pasa por el punto M y es perpendicular al segmento PQ. Para construir el plano secante construyamos dos rectas de las cuales, cada una de ellas, pasa por el punto M y es perpendicular a PQ.

Construimos una de estas rectas (DE) en el plano ABQ de forma que sea paralela a la recta AB. Como $AB \perp PQ$, $DE \perp PQ$.

Con el fin de construir la segunda recta, $FK \perp PQ$, tracemos primero en el plano $PCC_1P_1C_1 \parallel PC$. Para calcular la razón $PK : PC$, en la que el plano secante divide el segmento PC, introducimos un parámetro auxiliar, p, ej., haciendo $AA_1 = a$. Entonces, $AB = 2a$. Si $FK \perp PQ$, el $\triangle PMK \backsim \triangle PCQ$, y, por lo tanto, $\frac{PK}{PQ} = \frac{PM}{PC}$, donde $PC = a\sqrt{3}$, $PQ = \sqrt{PC^2 + QC^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$, $PM = \frac{a\sqrt{13}}{4}$. Obtenemos que $PK = \frac{PQ \cdot PM}{PC} = \frac{13a}{8\sqrt{3}}$. De modo que $PK : PC = \frac{13a}{8\sqrt{3}} : a\sqrt{3}$ o bien $PK : PC = 13 : 24$. Así, pues, construyendo un punto K tal que $PK : PC = 13 : 24$, trazamos la recta MK, perpendicular al segmento PQ. Según la construcción $FK \perp PQ$. O sea, el plano secante se determina con dos rectas: DE y FK.

Posteriormente, como $DE \parallel AB$, DE es paralela al plano ABC y de aquí sigue que el plano secante intersecará el plano ABC por una recta paralela a DE. Teniendo en cuenta esta consideración trazamos en el plano ABC la recta $GN \parallel DE$ por el punto K. Después, construyamos GE y ND, hallamos los puntos R y T en las rectas A_1C_1 y B_1C_1 y, tras de unir los puntos R y T, obtenemos el cuadrilátero $NGRT$ que es la sección del prisma con el plano secante perpendicular al segmento PQ y que pasa por su punto medio. De este modo, el cuadrilátero $NGRT$ es el lugar geométrico de puntos buscados.

OBSERVACIÓN. La construcción de la recta $FK \perp PQ$ pudo ser realizada como en los anteriores ejemplos, o sea, con ayuda de un dibujo auxiliar. Es decir, construimos un rectángulo semejante al original del rectángulo PP_1C_1C (fig. 122), o sea, el rectángulo $P'P_1'C_1'C'$ con una razón de los lados $P'P_1' : P'C' = 1 : \sqrt{3}$. (Si $AA_1 = a$, en el triángulo equilátero ABC, donde $AB = 2a$, tendremos $PC = a\sqrt{3}$, de donde $AA_1 : PC = 1 : \sqrt{3}$.)

En dicho rectángulo hallaremos Q' que es el punto medio del segmento $C'C_1'$ y, a continuación, M', punto medio del segmento $P'Q'$. Después, por el punto M' trazamos la recta $M'K' \perp P'Q'$. El segmento $P'C'$ se divide por esta recta en cierta razón $P'K' : P'C'$. En esta misma razón dividamos el segmento PC con el punto K. Seguidamente, construimos el plano secante.

PROBLEMAS PARA EL TRABAJO INDIVIDUAL

I. Construcciones más sencillas en el espacio

563. Tracen por la recta dada l el plano Q paralelo a otra recta dada m.

564. Construyan dos planos P y Q paralelos de modo que P pase por la recta l y Q, por la m, donde l y m son las rectas dadas cruzadas.

565. Por el punto A dado tracen el plano Q paralelo al plano P dado.

566. Por el punto A dado tracen el plano Q perpendicular a la recta l prefijada.

567. Por el punto A dado tracen la recta q perpendicular al plano P dado.

568. Por la recta l dada tracen el plano Q perpendicular al plano P dado.

569. Tracen la recta q perpendicular a cada una de las dos rectas l y m cruzadas dadas y que interseca cada una de ellas.

II. Lugares geométricos de puntos

570. Hallen el lugar geométrico de todos los puntos del espacio equidistantes de dos puntos A y B distintos.

571. Hallen el lugar geométrico de todos los puntos del espacio equidistantes de tres puntos A, B y C no colineales.

572. Hallen el lugar geométrico de todos los puntos del espacio equidistantes de dos rectas l_1 y l_2 intersecantes.

573. Hallen el lugar geométrico de todos los puntos del espacio equidistantes de cuatro puntos A, B, C y D dados que no pertenecen a un mismo plano.

574. Hallen el lugar geométrico de todos los puntos del espacio equidistantes de cuatro puntos A, B, C y D pertenecientes a un mismo plano.

575. Hallen el lugar geométrico de todos los puntos del espacio equidistantes de dos rectas paralelas l_1 y l_2 dadas.

576. Hallen el lugar geométrico de todos los puntos del espacio equidistantes de tres rectas l_1, l_2 y l_3 dadas que pasan por un punto y no pertenecen a un mismo plano.

577. Hallen el lugar geométrico de todos los puntos del espacio equidistantes de tres rectas l_1, l_2 y l_3 dadas que no yacen en un plano si $l_1 \parallel l_2$, $l_1 \parallel l_3$.

578. Hallen el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que se hallan a la distancia dada del plano P dado.

579. Hallen el lugar geométrico de todos los puntos del espacio equidistantes de dos planos paralelos P_1 y P_2.

580. Hallen el lugar geométrico de todos los puntos del espacio para los que la diferencia de los cuadrados de las distancias desde ellos hasta dos diferentes puntos A y B es una magnitud constante.

581. Hallen el lugar geométrico de todos los puntos del espacio desde los cuales el segmento AB dado se ve bajo ángulo recto.

582. Hallen el lugar geométrico de todos los puntos del espacio para los que la suma de los cuadrados de las distancias desde ellos hasta dos puntos A y B dados es una magnitud constante.

583. Hallen el lugar geométrico de todos los puntos del espacio para los que la razón de las distancias desde ellos hasta dos puntos A y B dados es una magnitud constante.

III. Aplicación de ciertos lugares geométricos de puntos y rectas

584. Se dan dos rectas cruzadas l_1 y l_2. Por el punto A dado, que no pertenece ni a l_1, ni a l_2, tracen la recta que interseca las dos rectas dadas.

585. Por el punto A dado tracen la recta q perpendicular a dos rectas dadas cruzadas l_1 y l_2.

586. Se dan tres rectas l_1, l_2 y l_3 que se cruzan a pares. Tracen la recta q que interseca las rectas dadas en tales puntos L_1, L_2 y L_3 que $L_1L_2 = L_2L_3$.

587. Por el punto A dado tracen la recta q paralela al plano P dado que interseca la recta l prefijada.

588. Tracen la recta q que interseca las dos rectas l_1 y l_2 dadas y paralelas a la tercera recta l_3 prefijada.

589. Tracen la recta q, que interseca las dos rectas dadas cruzadas l y m, perpendicular a l y paralela al plano P dado.

590. Tracen la recta q, que interseca dos rectas l_1 y l_2 dadas, perpendicular a la tercera recta l_3 y paralela al plano P dado.

591. Tracen la recta q, perteneciente al plano P_1 dado, paralela a otro plano dado P_2 y que pasa por el punto de intersección de la recta l dada con el plano P_1 dado.

592. Tracen en el plano P dado la recta q, perpendicular a la recta l dada, que no yace en P y que pasa por el punto A dado.

IV. Construcciones en las representaciones

1) *Construcciones en figuras planas situadas en el espacio.*

593. En un triángulo se han trazado dos alturas. Construyan el centro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.

594. La razón de los catetos de un triángulo rectángulo es igual a $3:4$. Construir el centro de la circunferencia inscrita en este triángulo.

595. Está dado un triángulo rectángulo isósceles. Construyan el cuadrado que yace en el plano del triángulo si de lado del cuadrado sirve: a) el cateto del triángulo dado; b) la hipotenusa del triángulo dado.

596. Se da un hexágono regular. a) Construyan la apotema del hexágono; b) construyan la bisectriz de uno de sus ángulos exteriores; c) bajen una perpendicular desde el centroide del hexágono a una de sus diagonales menores.

597. El ángulo agudo de un rombo es igual a 45°. Construyan la altura del rombo.

2) *Sección de un poliedro con un plano paralelo a dos rectas.*

598. En las aristas AA_1 y DD_1 del paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se han tomado los puntos P y Q, respectivamente. Construyan la sección del paralelepípedo con un plano paralelo a las rectas B_1P y A_1Q que pasa por el punto K perteneciente a la arista: a) CC_1; b) DD_1; c) A_1B_1; d) AB.

599. En la casa AA_1B_1B del prisma triangular $ABCA_1B_1C_1$ se ha tomado el punto P y en la arista CC_1, el punto Q. Construyan la sección del prisma con un plano paralelo a las rectas B_1P y A_1Q y que pasa por el punto K perteneciente a la arista: a) AA_1; b) BB_1; c) AC; d) B_1C_1.

600. En las aristas AA_1 y CC_1 del prisma triangular $ABCA_1B_1C_1$ se han tomado los puntos P y Q, respectivamente. Construyan la sección del prisma con un plano que pasa por K, que es el punto medio del segmento PQ, y es paralelo a las rectas B_1P y AQ.

601. En el plano de la base del prisma cuadrangular $ABCDB_1C_1D_1$ se toma el punto P y en la arista CC_1, el punto Q. Construyan la sección del prisma con un plano paralelo a las rectas B_1P y A_1Q y que pasa por el punto K perteneciente a la arista: a) DD_1; b) A_1B_1; c) AD; d) B_1C_1.

602. En las aristas SA y SC de la pirámide triangular $SABC$ se han tomado los puntos P y Q, respectivamente. Construir la sección de la pirámide con un plano paralelo a las rectas BP y AQ y que pasa por el punto K perteneciente a la arista: a) SA; b) SB; c) AC; d) BC.

603. En las aristas SA y SC de la pirámide triangular $SABC$ se han tomado los puntos P y Q, respectivamente. Construyan la sección de la pirámide con un plano que pasa por K,: que es el punto medio del segmento PQ, y es paralelo a las rectas BP y AQ.

604. En las aristas SD y SC de la pirámide cuadrangular $SABCD$ se han tomado los puntos P y Q, respectivamente. Construyan la sección de la pirámide con un plano que pasa por K, que es el punto medio del segmento PQ, y es paralelo a las rectas AP y DQ.

605. En las aristas SA y SC de la pirámide cuadrangular $SABCD$ se han tomado los puntos P y Q, respectivamente. Construyan la sección de la pirámide con un plano paralelo a las rectas BP y AQ y que pasa por el punto K perteneciente a la arista: a) SA; b) AD; c) DC; d) BC.

606. En las aristas AA_1 y CC_1 del prisma cuadrangular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se han tomado los puntos P y Q, respectivamente. Construyan la sección del prisma con un plano equidistante de un plano que pasa por D_1P paralelo a DQ y del otro plano que pasa por DQ paralelo a D_1P.

607. En el psisma cuadrangular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se han trazado las diagonales AC y A_1B de las caras $ABCD$ y ABB_1A_1, respectivamente. Construyan la sección del prisma con un plano equidistante de un plano que pasa por AC paralelo a A_1B y de otro plano que pasa por A_1B paralelo a AC.

3) *Construcción de la perpendicular a una recta y de la perpendicular a un plano.*

608. En la arista SB del tetraedro regular $SABC$ se ha tomado el punto medio K de la arista. a) Bajen desde el punto K perpendiculares a las aristas SA y SC; b) hallen el punto de intersección de la altura SO del tetraedro con un plano que pasa por las perpendiculares bajadas del punto K a las aristas SA y SC del tetraedro.

609. En el paralelepípedo rectangular $ABCDA_1B_1C_1D_1$, en el que $AB : AD : AA_1 = 3 : 2 : 1$, construyan rectas que pasen por el vértice B_1 y que sean perpendiculares a las rectas BC_1 y BA_1.

610. En la arista CC_1 del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se toma el punto P. Bajen una perpendicular desde el vértice A_1 a la recta DP si: a) $CP : PC_1 = 1 : 1$; b) $CP : PC_1 = 1 : 2$; c) $CP : PC_1 = 2 : 3$.

611. En el tetraedro regular $SABC$ bajen desde K, que es el punto medio de la arista AC, una perpendicular al plano de la casa SBC.

612. En la pirámide cuadrangular regular $SABCD$ la altura SO es igual al lado de la base AB. Desde el vértice D bajen una perpendicular al plano de la cara SBC.

613. En la base de un prisma yace el triángulo equilátero ABC. Las caras ABB_1A_1 y ACC_1A_1 del prisma son rombos con ángulo agudo de 60°. Bajemos una perpendicular desde el punto P, tomado en la arista AA_1, en la diagonal BC_1

de la cara BB_1C_1C si: a) $AP : PA_1 = 1 : 1$; b) $AP : PA_1 = 1 : 2$; c) $AP : PA_1 = 2 : 3$.

614. En el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se ha trazado un plano por los vértices B, C_1 y D. En la arista A_1B_1 se toma el punto P. Bajen una perpendicular del punto P al plano BC_1D si: a) $A_1P : PB_1 = 1 : 1$; b) $A_1P : PB_1 = 1 : 2$; c) $A_1P : PB_1 = 2 : 3$.

615. En la arista A_1B_1 del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se toma el punto P y por los puntos P, B y C_1 se traza un plano. Bajen una perpendicular del vértice D al plano PBC_1 si: a) $A_1P : PB_1 = 1 : 1$; b) $A_1P : PB_1 = 1 : 2$; c) $A_1P : PB_1 = 2 : 3$.

616. En el paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$, con una razón de las aristas $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 1$, por los vértices B, C_1 y D se traza un plano. En la arista A_1D_1 se ha tomado el punto P. Bajen una perpendicular desde el punto P al plano BC_1D si: a) $A_1P : PD_1 = 1 : 1$; b) $A_1P : PD_1 = 1 : 2$; c) $A_1P : PD_1 = 2 : 3$.

617. En la pirámide triangular $SABC$ la base es el triángulo rectángulo ABC con el ángulo recto en el vértice C y razón de los catetos $AC : BC = 3 : 4$. La altura de la pirámide se proyecta en el punto C y es igual a la hipotenusa AB. Del punto C bajen una perpendicular al plano SAB.

4) *Construcción de la sección del poliedro con un plano perpendicular a la recta dada que pasa por el punto dado.*

618. En las aristas DD_1 y CD del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se han tomado los puntos P y Q, respectivamente. Construyan la sección del cubo con un plano perpendicular a la recta C_1Q que pasa por el punto P si: a) $DP : PD_1 = 1 : 1$, $DQ : QC = 1 : 1$; b) $DP : PD_1 = 3 : 1$, $DQ : QC = 1 : 1$; c) $DP : PD_1 = 3 : 1$ $DQ : QC = 3 : 1$; d) $DP : PD_1 = 1 : 3$, $DQ : QC = 3 : 1$.

619. En la pirámide triangular regular $SABC$ la altura es igual al lado de la base. Construyan la sección de la pirámide con un plano perpendicular a la arista SC que pasa por la arista AB de la base.

620. En la arista DD_1 del paralelepípedo rectangular $ABCDA_1B_1C_1D_1$, en el que $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 1$, se toma el punto P. Construyan la sección del paralelepípedo con un plano, perpendicular a la recta C_1P, que pasa por el punto K que es el centroide de la cara AA_1D_1D si: a) $DP : PD_1 = 1 : 1$; b) $DP : PD_1 = 1 : 2$; c) $DP : PD_1 = 2 : 3$.

621. En las aristas BB_1 y DD_1 del paralelepípedo recto $ABCDA_1B_1C_1D_1$, en el que $AB : AD : AA_1 = 1 : 1 : 2$ y el ángulo BAD es igual a 60° se han tomado los puntos P y Q, respectivamente. Construyan la sección del paralelepípedo con un plano, perpendicular a la recta AP, que pasa por el punto Q, si: a) $BP : PB_1 = 1 : 1$, $DQ : QD_1 = 1 : 1$; b) $BP : PB_1 = 1 : 1$, $DQ : QD_1 = 1 : 2$; c) $BP : PB_1 = 1 : 2$, $DQ : QD_1 = 2 : 1$.

5) *Construcción del lugar geométrico de puntos equidistantes de los puntos dados.*

622. En el prisma triangular regular $ABCA_1B_1C_1$ $AA_1 : AC = 1 : 2$. Construyan el lugar geométrico de los puntos que yacen en la superficie del prisma y equidistantes de los puntos: a) A y C_1; b) P y C_1, donde P es el punto medio de la arista AB; c) Q y C_1, donde Q es el punto medio de la arista AA_1.

623. Construir el lugar geométrico de los puntos pertenecientes a la superficie de un cubo y equidistantes de los dos siguientes puntos: a) P y Q pertenecientes a las aristas AB y CD, respectivamente; b) B_1 y D que son los extremos de la diagonal B_1D del cubo; c) M y K, que son el centroide de la cara AA_1D_1D y el punto medio de la arista BB_1, respectivamente; d) B_1 y O, que son los vértices de cubo y el centroide de la cara $ABCD$, respectivamente.

624. En las aristas A_1B_1, C_1C y AD del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se toman los puntos medios P, Q y R de estas aristas, respectivamente. Construyan los puntos que yacen en la superficie del cubo y equidistantes de los siguientes puntos: a) D, D_1 y P; b) D_1, P y Q; c) P, Q y R.

625. En las aristas AB y DD_1 del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se toman los puntos medios P y Q de estas aristas, respectivamente. Construyan un punto equidistante de los siguientes cuatro puntos: a) A_1, C_1, P y Q; b) A, C_1, P y Q; c) D, C_1, P y Q.

626. En las continuaciones de las aristas AB y DD_1 del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se toman tales puntos P y Q, respectivamente, que $AP : BP = 3 : 1$ y $D_1Q : DQ = 3:1$. Construyan un punto equidistante de los siguientes cuatro puntos: a) A_1, C_1, P y Q; b) A, C_1 P y Q: c) D, C_1, P y Q.

627. En las aristas BB_1 y CC_1 del prisma triangular regular $ABCA_1B_1C_1$ se toman, respectivamente, P y Q que son sus puntos medios. Las caras laterales del prisma son cuadrados. Construyan el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los siguientes tres puntos: a) A, B y Q; b) A, B_1 y Q; c) A, P y Q.

628. Dos triángulos rectángulos isósceles iguales ABC y ABC_1 están situados de tal forma que su cateto AB es común, mientras que $CC_1 = BC$. En las rectas BC, AB y AC_1 construyan puntos equidistantes de los puntos C y C_1.

629. En el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se trazan las diagonales AD_1 y DC_1 de las caras laterales. Construyan el lugar geométrico de los puntos equidistantes de las rectas AD_1 y DC_1.

630. Construyan el lugar geométrico de los puntos equidistantes de las rectas que contienen las aristas B_1C_1 y CD del prisma recto $ABCDA_1B_1C_1D_1$, cuya base es el cuadrado ABCD.

§ 10. RECTAS CRUZADAS. ÁNGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

EJEMPLO 1. En el tetraedro regular $SABC$ el segmento DO une el punto medio D de la arista SA con el centroide O de la cara ABC, mientras que E es el punto medio de la arista SB. Hallemos el ángulo entre las rectas DO y CE.

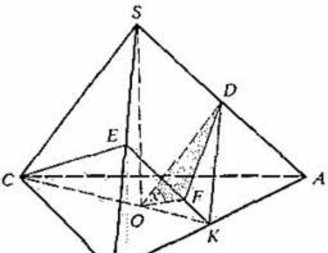


Fig. 123

SOLUCIÓN. Supongamos que el cuadrilátero $SABC$ con sus diagonales (fig. 123) es la representación del tetraedro dado. Es fácil cerciorarse de que la representación es completa y métricamente definida. Sea D el punto medio de la arista SA, E, el punto medio de la arista SB y el punto O el centroide de la cara ABC. Construyamos las rectas OD y CE. (Estas construcciones no provocan el consumo de parámetros.)

A continuación, construyamos un ángulo igual al ángulo entre las rectas DO y CE. Con este fin, hallemos el punto K que es la intersección de las rectas CO y AB y unámoslo con el punto E. En el plano CEK, por el punto O, trazamos la recta $OF \parallel CE$. Entonces,

$\angle DOF$ será igual al ángulo entre las rectas DO y CE. Para abreviar, hagamos $\angle DOF = x$. Para hallar x calculemos los lados del $\triangle FOD$ y, seguidamente, empleemos el teorema de los cosenos.

Al realizar los cálculos introducimos un parámentro auxiliar, haciendo $AB = a$. Entonces, como D es el punto medio de la arista SA y el triángulo SAO es rectángulo, $OD = \frac{1}{2} SA = \frac{a}{2}$, mientras que de la semejanza de $\triangle KFO$ y $\triangle KEC: \frac{OF}{CE} = \frac{OK}{CK} = \frac{1}{3}$, es decir, $OF = \frac{1}{3} CE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Después, en el $\triangle DKF$ $DF^2 = DK^2 + KF^2 - 2DK \cdot KF \cdot \cos \angle DFK$. Como D, E y K son los puntos medios de los lados del $\triangle SAB$ regular, $DK = \frac{1}{2} SB = \frac{a}{2}$ y $\angle DKF = 60°$. Además, $KF = \frac{1}{3} KE = \frac{a}{6}$. De $\triangle DKF$ obtenemos que $DF^2 = \frac{7}{36} a^2$. A continuación de $\triangle ODF$ obtenemos: $DF^2 = OF^2 + OD^2 - 2OF \cdot OD \cos x$, de donde $\cos x = \frac{5\sqrt{3}}{18}$.

EJEMPLO 2. Está dado el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cuya arista es igual a a. En la arista DC se ha tomado P que es el punto medio de ésta. Hallemos la distancia entre los siguientes pares de rectas: a) AA_1 y D_1P; b) AD y D_1P; c) BD y D_1P.

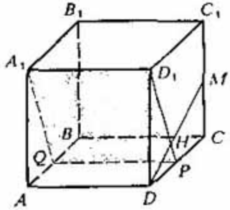


Fig. 124

SOLUCIÓN. Sea la figura $ABCDA_1B_1C_1D_1$ la representación de un cubo (fig. 124) y sea ésta completa y métricamente definida, ya que al construirla se han consumido los cinco parámetros. Como en estereometría se puede considerar que la representación de la figura original Φ_0 es cualquier figura Φ semejante a la proyección paralela de Φ_0 en cierto plano, es posible suponer que $ABCDA_1B_1C_1D_1$ es la representación de un cubo con arista igual a a. En la representación obtenida construyamos P, el punto medio del segmento DC y unamos P con D_1.

a) Es evidente que como A_1D_1 es la arista del cubo, $A_1D_1 \perp AA_1$ y A_1D_1 es perpendicular al plano CDD_1, es decir, $A_1D_1 \perp D_1P$. Pero, entonces, $A_1D_1 = a$ es la distancia que buscamos.

b) Como el punto P yace en el plano A_1D_1P y en él ABC, estos planos se cortan por una recta que pasa por P. Sea esa recta PQ. Como A_1D_1 es paralela al plano ABC, $PQ \parallel A_1D_1$. Además, construyamos A_1Q. Es fácil mostrar que AD es paralela al plano A_1D_1P y, por lo tanto, la distancia entre las rectas AD y D_1P es igual a la distancia desde la recta AD hasta el plano A_1D_1P.

Como la construcción de la perpendicular del punto D a la recta D_1P en el plano D_1DC debe realizarse en la representación métricamente definida, no es posible tomar al azar en la recta D_1P el punto H y considerar que $DH \perp D_1P$. Realicemos la construcción del modo siguiente. Construyamos el segmento DM, donde M es el punto medio de la arista CC_1. Entonces, de la igualdad de los triángulos DD_1P y DCM se desprende que $\angle DPH = \angle CMD$, o sea, $\angle HDP + \angle DPH = 90°$, lo que significa que en el triángulo DPH el $\angle DHP = 90°$. Así, pues, $DH = D_1P$.

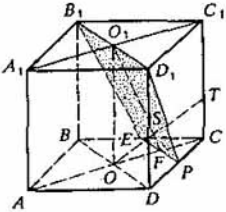


Fig. 125

Mostremos que DH es perpendicular al plano A_1D_1P. En efecto, como AD es una perpendicular al plano DCC_1, $DH \perp AD$ y $DH \perp PQ$. De modo que, $DH \perp D_1P$ y $DH \perp PQ$, por lo tanto, DH es perpendicular al plano A_1D_1P. Pero, en tal caso, la longitud del segmento DH es la distancia buscada. Expresando con dos procedimientos el área del $\triangle DD_1P$, obtenemos una ecuación con relación a DH: $DH \cdot D_1P = DP \cdot DD_1$, de donde hallamos que $DH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

c) En el plano ABC (fig. 125) construyamos la recta EK que pasa por el punto P y por E, que es el punto medio de la arista BC. Entonces, $BD \parallel EP$. Construyamos el plano B_1EP. Como $BD \parallel EP$, BD será paralela al plano B_1EP, y, de este modo, la distancia buscada será igual a la distancia desde la recta BD hasta el plano B_1EP. Con el fin de hallar dicha distancia tracemos del punto O una perpendicular al plano B_1EP. La base de la perpendicular, es decir, el punto S, no puede ser tomado al azar, ya que la representación es métricamente definida. Realicemos la construcción de S del modo siguiente. Construyamos F que es el punto de intersección de las rectas OC y EP, a continuación, el punto O_1 en el que concurren las rectas A_1C_1 y B_1D_1 y, después, unamos los puntos O_1 y F.

A continuación, tomemos en la arista CC_1 tal punto T que se cumpla la igualdad $\frac{CT}{OC} = \frac{OF}{OO_1}$.

Ya que $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $OF = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ y $OO_1 = a$, $CT = \frac{a}{4}$. Construyamos el segmento OT y el punto S que es el de intersección de OT con O_1F.

Como de acuerdo con la construcción los triángulos rectángulos OO_1F y OCT son semejantes, $\angle O_1FO = \angle OTC = \angle COT$ y, en tal caso, $\angle O_1FO + \angle COT = 90°$ y, por lo tanto, $OT \perp O_1F$. Ahora, desmostremos que OT es perpendicular al plano B_1EP. Como B_1D_1 es perpendicular al plano AA_1C y OT yace en el plano AA_1C, $OT \perp B_1D_1$.

Así, pues, $OT \perp B_1D_1$ y $OT \perp O_1F$. De modo que OT es perpendicular al plano B_1EP. Pero, entonces, la largura del segmento OS es la distancia buscada. Expresando con dos procedimientos el área del triángulo O_1OF, obtenemos una ecuación con relación a OS : $OS \cdot O_1F = OF \cdot OO_1$ de donde,

ya que $OF = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $OO_1 = a$, $O_1F = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$, hallamos que $OS = \frac{a}{3}$.

EJEMPLO 3. La superficie lateral de la pirámide cuadrangular regular $SABCD$ es dos veces mayor que el área de su base. En las caras SAD y SDC se han trazado las medianas AQ y DP. Hallemos el ángulo entre ellas.

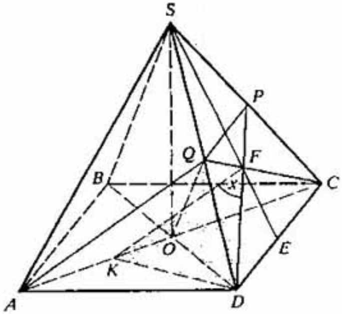


Fig. 126

SOLUCIÓN. *I procedimiento*. Sea la figura $SABCD$ la pirámide dada (fig. 126). Esta es una representación completa y para realizarla se han gastado los cinco parámetros, es decir, está métricamente definida. En efecto, considerando que el paralelogramo $ABCD$ es la representación de un cuadrado, consumimos dos parámetros; considerando que SO es la representación de un segmento perpendicular al plano $ABCD$ consumimos asimismo dos parámetros. Suponiendo que $S_{\text{lat}} = 2S_{ABCD}$, de hecho consideramos que la altura de la cara lateral es igual al lado de su base. (Tomando SE, es decir, la altura de la cara lateral, igual a h y el lado de la base de la pirámide $DC = a$, de la igualdad $S_{\text{lat}} = 2S_{ABCD}$, obtenemos: $4 \cdot \frac{1}{2}ah = 2a^2$, de donde se desprende que $h = a$.)

Así, pues, para las construcciones auxiliares de carácter métrico no hay parámetros libres. Señalemos, que con el procedimiento elegido para la resolución no habrá construcciones que requieran el posterior consumo de parámetros.

Con el fin de hallar el ángulo buscado, incluyámoslo en algún triángulo. P. ej., esto se puede hacer del modo que sigue: uniendo los puntos Q y C (CQ será la mediana del triángulo SCD) y designemos con F el punto de intersección de las rectas DP y CQ. En el triángulo AQC, por el punto F, trazamos la recta $KF \parallel AQ$ y, por fin, unimos los puntos K y D.

Como según la construcción $KF \parallel AQ$, el ángulo entre las rectas KF y DF es igual al buscado. Para abreviar supongamos que $\angle KFD = x$. Para hallar x calculemos los lados del triángulo DFK.

Introduzcamos un parámetro auxiliar, haciendo para ello $DC = a$. Entonces, como dijimos al calcular los parámetros de la representación, $SE = a$. Pero SE es la mediana del triágulo SDC, o sea, $FE = \frac{a}{3}$. Entonces, del triángulo DEF, donde $DE = \frac{a}{2}$, hallamos que $DF = \frac{a\sqrt{13}}{6}$. Más adelante, ya que el triángulo CFK es semejante al triángulo CQA, $\frac{KF}{AQ} = \frac{CF}{CQ}$. Pero $\frac{CF}{CQ} = \frac{2}{3}$ y, por lo tanto, $KF = \frac{2}{3} AQ$. Mas $AQ = DP$ y, por ello, $KF = \frac{2}{3} DP$. Ahora, tomando asimismo en consideración que $DF = \frac{2}{3} DP$, llegamos a la conclusión de que $KF = DF$, es decir, $KF = \frac{a\sqrt{13}}{6}$. El tercer lado del triángulo DFK se halla del triángulo CDK, donde $CK = \frac{2}{3}$, $AC = \frac{2}{3} a\sqrt{2}$, $CD = a$, $\angle DCK = 45°$. Obtenemos, $DK^2 = CK^2 + DC^2 - 2CK \cdot DC \times \cos 45°$, de donde $DK^2 = \frac{5a^2}{9}$. Así, pues, conocemos los tres lados del triángulo DFK. Aplicando a éste el teorema de los cosenos, obtenemos: $DK^2 = KF^2 + FD^2 - 2\,KF \cdot FD \cos x$ o bien $\frac{5a^2}{9} = \frac{13a^2}{36} + \frac{13a^2}{36} - 2\,\frac{a\sqrt{13}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{6} \cos x$, de donde $\cos x = \frac{3}{13}$, es decir, $x = \arccos \frac{3}{13}$.

OBSERVACIÓN. Indiquemos una vía más para incluir el ángulo buscado en el triángulo. Por el punto Q en el plano SDC trazamos la recta $QT \parallel DP$ y unamos el punto T con A (fig. 127). Es evidente, que $\angle TQA$ es igual al buscado. Él puede ser hallado en el triángulo TQA. Podemos operar de otro modo. Hallar en el triángulo AQL $\angle AQL$ que completa el ángulo buscado hasta 180° y, después, hallar el buscado.

II procedimiento. Introduzcamos en el espacio la base rectangular cartesiana $O\overline{ijk}$, cuyos vectores $\overline{i}$, $\overline{j}$ y $\overline{k}$ son los vectores unitarios de los ejes Ox, Oy y Oz (fig. 128). A continuación, después de descomponer los vectores $\overline{DP}$ y $\overline{AQ}$ por los vectores de dicha base hallamos $\cos \angle(\overline{AQ}, \overline{DP})$. Introducimos un paramentro auxiliar haciendo $DC = a$. Entonces, $OD = OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ y del triángulo SOE, donde $SE = a$ y $OE = \frac{a}{2}$, obtenemos que $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ahora, expresemos los vectores $\overline{DP}$ y $\overline{AQ}$ por $\overline{i}$, $\overline{j}$ y $\overline{k}$. $\overline{DP} = \overline{OP} - \overline{OD}$, donde $\overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{OC} + \frac{1}{2}\overline{OS} = \frac{a\sqrt{2}}{4}\overline{i} + \frac{a\sqrt{3}}{4}\overline{k}$, $\overline{OD} = -\frac{a\sqrt{2}}{2}\overline{j}$.

Entonces, $\overline{DP}=\frac{a\sqrt{2}}{4}\,\bar{i}-\frac{a\sqrt{2}}{2}\,\bar{j}+\frac{a\sqrt{3}}{4}\,\bar{k}$. A continuación, $\overline{AQ}=\overline{OQ}-\overline{OA}$, donde $\overline{OQ}=\frac{1}{2}\,\overline{OD}+\frac{1}{2}\,\overline{OS}=\frac{a\sqrt{2}}{4}\,\bar{j}+\frac{a\sqrt{3}}{4}\,\bar{k}$,

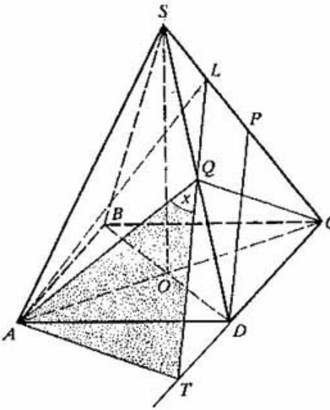


Fig. 127

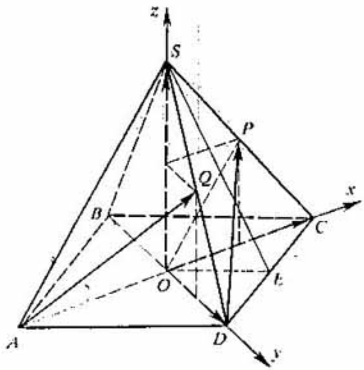


Fig. 128

$\overline{OA}=-\frac{a\sqrt{2}}{2}\,\bar{i}$. Así, pues, $\overline{AQ}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\,\bar{i}+\frac{a\sqrt{2}}{4}\,\bar{j}+\frac{a\sqrt{3}}{4}\,\bar{k}$. Por consiguiente,

$$\cos\angle(\overline{AQ},\ \overline{DP})=\frac{\overline{AQ}\cdot\overline{DP}}{|\overline{AQ}|\,|\overline{DP}|}=$$

$$=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{4}-\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{4}+\frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}}=$$

$$=\frac{3}{13},\quad \text{o sea,}\quad \angle(\overline{AQ},\ \overline{DP})=\arccos\frac{3}{13}.$$

EJEMPLO 4. En la base de la pirámide cuadrangular $SABCD$ yace un rectángulo con razón de los lados $AB:AD=1:3$. Cada una de las aristas laterales forma un ángulo de 60° con el plano de la base. Hallen el ángulo que forma la recta DP con el plano SCD si P es el punto medio de la arista SB.

SOLUCIÓN. Supongamos que la figura $SABCD$ (fig. 129) es la representación de la pirámide dada. Ella es completa. Calculemos su número paramétrico. Consideremos que el paralelogramo arbitrario $ABCD$ es la representación de un rectángulo (es decir, consumimos un parámetro) con una razón conocida de los lados (por consiguiente, consumimos un parámetro más). Bajemos la perpendicular SO del vértice S al plano de la base (es decir, para representarla consumimos dos parámetros más) y unimos el punto O con el vértice A. El ángulo SAO está formado por la arista SA y el plano de la base. Vamos a considerar que el ángulo SAO es la representación de un ángulo que en el original es igual a 60° (con ello, consumimos un parámetro). Así, pues, para la representación hemos consumido un total de cinco parámetros, lo que significa que la representación es métricamente definida, es decir, que las posteriores construcciones de carácter métrico no pueden ser realizadas arbitrariamente en esa representación.

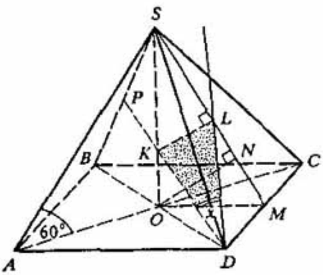


Fig. 129

Seguidamente, unimos el punto O con el vértice C de la base. Entonces, $\angle SAO = \angle SCO = 60°$ y los triángulos rectángulos SAO y SCO, que tienen el cateto común SO y un ángulo agudo igual, son equivalentes. Esto quiere decir que $OA = OC$, es decir, O es el punto medio de la diagonal AC y, esto significa, que es el punto de intersección de las diagonales del rectángulo $ABCD$. De la igualdad de los triángulos SAO y SCO se deduce que $SA = SC$, o sea, que el $\triangle SAC$ es isósceles. Como $\angle SAO = \angle SCO = 60°$, también $\angle ASC = 60°$ y, por lo tanto, el $\triangle SAC$ es equilátero. Por analogía, el $\triangle SBD$ es asimismo equilátero.

Pasemos ahora a la construcción del ángulo buscado. Como el ángulo entre una recta y un plano es igual al ángulo formado por la recta con su proyección ortogonal sobre dicho plano, bajemos una perpendicular de cualquier punto de la recta DP al plano SCD. Con este fin, tracemos primero la apotema SM de la cara SCD (M es el punto medio de la arista CD) y unimos el punto M con el O. En tal caso, como $SM \perp CD$ y OM es la proyección de SM en el plano $ABCD$, $OM \perp CD$. Así, pues, $CD \perp SM$ y $CD \perp CM$, lo que quiere decir que la recta CD será perpendicular a cualquier recta que yazca en el plano SOM.

Por esta razón, si desde el punto K bajamos la perpendicular KL a la apotema SM, KL será también perpendicular al plano SCD y, por consiguiente, $\angle KDL$ será el ángulo buscado. Hagamos $\angle KDL =$

$= x$. Como ya hemos dicho, no podemos realizar al azar nuevas construcciones de carácter métrico en la representación de la pirámide dada, es decir, tomando al azar en la apotema SM el punto L, no se puede decir que el segmento KL se va a considerar como la representación de la perpendicular a SM. Para construir $KL \perp SM$, construyamos primero $ON \perp SM$. Esto se puede hacer si calculamos en qué razón divide el punto N la hipotenusa SM en el $\triangle SOM$.

Haciendo $AB = a$ obtenemos consecutivamente: $BC = 3a$, $OM = \frac{3a}{2}$, $AC = a\sqrt{10}$, $SC = a\sqrt{10}$, $OC = \frac{a\sqrt{10}}{2}$, $SO = \frac{a\sqrt{30}}{2}$, $SM = \frac{a\sqrt{39}}{2}$, $MN = \frac{3a\sqrt{39}}{2}$, es decir, $MN : SN = 3 : 13$. Después de construir tal punto N que $MN : SM = 3 : 13$, trazamos $KL \parallel ON$.

Hagamos $\angle KDL = x$. Para su determinación es suficiente calcular cualesquiera dos lados del triángulo rectángulo DKL, p.ej., el cateto KL y la hipotenusa DK. De la semejanza de los $\triangle SKL$ y $\triangle SOM$, obtenemos: $\frac{KL}{OM} = \frac{SK}{SM}$, donde $OM = \frac{3a}{2}$, $SM = \frac{a\sqrt{39}}{2}$ y, como K es el punto de inrsección de las medianas SO y DP del triángulo SBD, $SK = \frac{2}{3}SO = \frac{a\sqrt{30}}{3}$. Así, pues, $KL = \frac{OM \cdot SK}{SM} = \frac{a\sqrt{30}}{39}$.

Como el $\triangle SBD$ es equilátero, $DP = SO$. Pero $DK = \frac{2}{3}DP$ y $SK = \frac{2}{3}SO$. Por lo tanto, $DK = SK = \frac{a\sqrt{30}}{3}$. Por fin, del $\triangle DKL$, donde $\angle DLK = 90°$, tenemos $\operatorname{sen} x = \frac{KL}{DK} = \frac{\sqrt{39}}{13}$, es decir, $x = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{39}}{13}$.

EJEMPLO 5. En la base de la pirámide cuadrangular $SABCD$ con el vértice en el punto S yace un cuadrado, mientras que su altura se proyecta en el punto A. El área de la cara SBC es dos veces mayor que el área de la cara SAB. Hallemos el ángulo entre la altura AF de la cara SAB y el plano diagonal SAC.

SOLUCIÓN. Supongamos que la figura $SABCD$ (fig. 130) es la representación de la pirámide dada y que ella es completa. Calculemos el número de parámetros consumidos para esa representación. Se considera que el paralelogramo $ABCD$ es la representación de un cuadrado, esto son dos parámetros, consideremos que el segmento SA es la representación de la perpendicular al plano de la base, es decir, dos parámetros. El área de la cara SAB se toma dos veces menor que la de la cara SBC, es decir, $\left(\frac{1}{2}SA \cdot AB\right) : \left(\frac{1}{2}SB \cdot BK\right) = 1 : 2$ o bien que $SA : SB = 1 : 2$ y, de este modo, consumimos un parámetro más. Así, pues, para la representación hemos consumido 5 parámetros y, por ello, ésta es métricamente definida. Esto significa que ahora ya no podemos tomar al azar el punto F en la arista SB y considerar que el segmento AF es la representación de la altura de la cara SAB. Al mismo tiempo, con el fin de determinar el ángulo buscado, ha de construirse la altura AF (a continuación, será también preciso construir la representación de su proyección en el plano SAC.

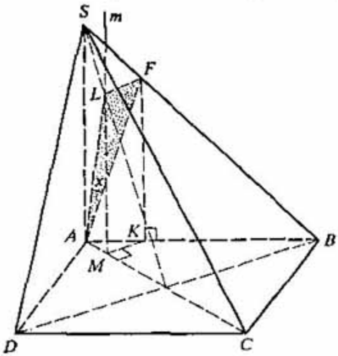


Fig. 130

Para efectuar las construcciones necesarias y los posteriores cálculos, introducimos un parámetro auxiliar haciendo, p. e., $AB=a$. Entonces, como en el triángulo SAB $SA=\frac{1}{2}SB$, el $\angle SBA=30°$ y, por lo tanto, si $AF\perp SB$, en el triángulo rectángulo ABF tendremos $AF=\frac{1}{2}AB$, o sea, $AF=\frac{a}{2}$. En tal caso, $SA=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $SB=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ y $SF=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Así, pues, $SF:SB=\frac{a\sqrt{3}}{6}:\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ o bien $SF:SB=1:4$, de donde queda clara la construcción de la altura AF.

OBSERVACIÓN. La construcción de la altura AF se hubiera podido realizar asimismo mediante un dibujo auxiliar en el que estuviera representado un triángulo original SAB. Acerca de semejante procedimiento de construcción se habló con detalle en los ejemplos 7, 8, 9 del apartado anterior.

Más adelante, es preciso construir la proyección de la altura AF en el plano SAC. Esto se puede realizar del modo siguiente. Por el punto F en el plano SAB trazamos una recta paralela a la recta SA. El punto de intersección de ésta con la recta AB se designa con K. En el plano ABC, por el punto K, trazamos una recta paralela a BD. Designemos con M el punto de intersección de AC con la mencionada recta. Por el punto M en el plano SAC trazamos la recta m, por la que se intersecan los planos SAC y FKM. Ya que tanto el plano SAC como el plano FKM son perpendiculares al plano ABC, es evidente que su línea de intersección, es decir, la recta m, será perpendicular al plano ABC, o sea, $m \parallel SA$ y $m \parallel FK$. La intersección de la línea m con el plano SBD será designada con L. A continuación, unimos los puntos F y L.

El segmento FL representará la perpendicular al plano SAC. (En efecto, $FL \parallel MK$, pero MK es perpendicular al plano SAC ya que $MK \perp AC$ y $MK \perp SA$.) Pero, entonces, AL es la proyección de AF en el plano SAC y, por lo tanto, $\angle FAL$ es el ángulo buscado. Para abreviar, hagamos $\angle FAL = x$. Con el fin de determinar x es posible hallar FL y, seguidamente, $\operatorname{sen} x = \frac{FL}{AF}$. Más arriba, ya hallamos $AF = \frac{a}{2}$. Para calcular FL advirtamos que, de acuerdo con la construcción, el cuadrilátero $MKFL$ es un rectángulo, es decir, $FL = KM$.

A continuación, podemos hallar KM si notamos que $\triangle AKM \backsim \triangle ABC$, donde $\frac{KM}{BC} = \frac{AK}{AC}$, donde $BC = a$, $AC = a\sqrt{2}$ y $AK = \frac{a}{4}$ (ya que en el triángulo SAB $SF : SB = 1:4$ y, por lo tanto, asimismo $AK : AB = 1:4$).

Así, pues, $KM = \frac{a}{4\sqrt{2}}$. Ahora, hallamos que $\operatorname{sen} x = \frac{a}{4\sqrt{2}} : \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ y, de este modo, $\angle FAL = \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

PROBLEMAS PARA EL TRABAJO INDIVIDUAL

631. La oblicua AB forma con el plano P un ángulo de 45° que es igual al ángulo entre la proyección de dicha oblicua y la recta AC situada en el plano P. Hallen el ángulo BAC.

632. En una pirámide triangular regular la altura es igual al lado de la base. Hallen el ángulo formado por la arista lateral con el plano de la base.

633. La recta AB yace en el plano P por un lado del cual, por el punto B, se trazan las rectas BC y BD perpendiculares a la recta AB y que con el plano P forman ángulos iguales a 50° y 15°. Hallen el ángulo CBD.

634. La diagonal de un prisma cuadrangular regular forma con el plano de la base un ángulo de 45°. Hallen el ángulo formado por esta diagonal con la diagonal de la cara lateral que la interseca.

635. En la sección axial del cono el ángulo en el vértice es igual a 2α. Por dicho vértice se traza un plano de modo que la altura del cono forma con él el ángulo β. Hallen el ángulo entre las generatrices por las que este plano corta la superficie del cono.

636. En el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se ha trazado el plano secante PQC_1B_1, donde P y Q son los puntos medios de las aristas AA_1 y DD_1, respectivamente. Hallen el ángulo entre la recta CQ y el plano secante.

637. En el tetraedro regular $SABC$ hallen el ángulo entre la arista AB y el plano de la cara SAC.

638. Por la diagonal AC de la pirámide cuadrangular regular $SABCD$ se traza un plano secante perpendicular a la cara SAD. ¿Qué ángulo forma la arista SD con el plano secante?

639. En la pirámide cuadrangular regular $SABCD$ la razón entre la altura SO y el lado AB de la base es igual a 2 : 3. En la diagonal AC se toma tal punto P que $AP = PO$. Hallen el ángulo formado por la recta SP con el plano SAD.

640. La base de la pirámide cuadrangular $SABCD$ es el cuadrado $ABCD$. En la cara lateral SAB, perpendicular al plano de la base y que es un triángulo

regular, se ha trazado la mediana AK. El punto K está unido con el vértice C. Hallen los ángulos que forman los lados AK y CK del triángulo ACK con el plano de la base.

641. La base de la pirámide $SABCD$ es un rectángulo con los lados $AD = a$, $AB = b$. La altura de la pirámide se proyecta en el punto O, punto de intersección de las diagonales de la base. La arista lateral forma 30° con el plano de la base. Hallen el ángulo entre la recta DP y el plano SAC si P es el punto medio de la altura SO.

642. La base del paralelepípedo recto $ABCDA_1B_1C_1D_1$ es un paralelogramo con ángulo agudo igual a 60° en el vértice A. Hallen el ángulo entre la diagonal B_1D del paralelepípedo y la cara lateral CC_1D_1D si $AB : AD : AA_1 = 2 : 1 : 3$.

643. En el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ P es el punto medio de la arista AB. Hallen el ángulo entre la recta C_1P y la sección diagonal AA_1C_1C del cubo.

644. En el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se han trazado el plano secante BDC_1 y la diagonal CD_1 de la cara CC_1D_1D. Hallen el ángulo entre la diagonal CD_1 y el plano secante.

645. La base de la pirámide $SABCD$ es un rectángulo con razón de los lados $AB : BC = 1 : 2$. Cada arista lateral está inclinada con relación al plano de la base bajo un ángulo de 60°. Hallen los ángulos que forman las rectas DP y DQ con el plano diagonal SAC si P y Q son los puntos medios de las aristas SA y SC.

646. En una pirámide cuadrangular regular la arista lateral forma con el plano de la base un ángulo de 45°. Por el vértice de la base y el punto medio de la altura de la pirámide se traza una recta. Hallen el ángulo entre dicha recta y las caras laterales de la pirámide.

647. En el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se han trazado el plano C_1DB y la recta DP, donde P es el punto medio de la arista BB_1. Hallen el ángulo entre la recta DP y el plano secante.

648. En el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se traza el plano secante BDP, donde P es el punto medio de la arista CC_1. Hallen el ángulo entre la recta A_1Q y el plano secante si Q es el punto medio de la arista DD_1.

649. La base de la pirámide $SABC$ es un triángulo isósceles con el ángulo C recto. Cada arista lateral forma con el plano de la base un ángulo de 45°. Hallen el ángulo entre la mediana AM de la cara SAB y el plano de la cara SBC.

650. Una recta es tangente a un cono y en el punto de tangencia forma con su generatriz el ángulo agudo α, mientras que con el plano de la base del cono, el ángulo β. Hallen el ángulo entre la generatriz y el plano de la base.

651. Una circunferencia de radio R y un triángulo equilátero con lado igual a $R\sqrt{3}$ yacen en planos perpendiculares entre sí. El segmento que une el centro de la circunferencia con el centroide del triángulo forma ángulos iguales a 30° con los planos dados, además, uno de los lados del triángulo pertenece al plano de la circunferencia. Hallen la longitud de aquella parte del lado del triángulo que yace dentro de la circunferencia.

652. En el prisma cuadrangular regular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ las diagonales B_1D y BD_1 son perpendiculares entre sí. Hallen el ángulo entre las diagonales B_1D y A_1C.

653. Un cuadrado, en el que se ha trazado la diagonal, está enrollado en forma de la superficie lateral de un prisma cuadrangular regular y, de esta forma, la diagonal del cuadrado se ha convertido en una quebrada no plana. Hallen los ángulos entre los segmentos de la mencionada quebrada.

654. D es el punto medio de la arista SA, E, el punto medio de la altura SO del tetraedro regular $SABC$. Hallen el ángulo entre las rectas OD y CE.

655. Demuestren que en una pirámide triangular regular los pares de aristas no intersecantes son perpendiculares entre sí.

656. Demuestren que si las aristas opuestas de una pirámide triangular son a pares perpendiculares, todas las alturas de la pirámide concurren en un mismo punto.

657. En el tetraedro regular $SABC$ AD es la mediana del $\triangle ABC$, E, el punto medio de la arista SB. Hallen el ángulo entre las rectas AD y CE.

658. En el tetraedro $SABC$ SA es la perpendicular al plano ABC, $AB \perp AC$ y $SA = AB = AC$. Hallen el ángulo entre las rectas OD y CE si D es el punto medio de la arista SA, E, el punto medio de la arista SB y el punto O es el centroide de la base ABC del tetraedro.

659. La base del paralelepípedo recto $ABCDA_1B_1C_1D_1$ es el paralelogramo $ABCD$ con el ángulo agudo DAB igual a γ. Las diagonales AB_1 y BC_1 de las caras laterales forman con el plano de la base ángulos iguales a α y β, respectivamente. Hallen el ángulo entre las mencionadas diagonales.

660. El ángulo entre las rectas cruzadas a y b es igual a 60°. La distancia desde la perpendicular común de las rectas a y b hasta el punto A, que yace en la recta a, es igual a la distancia desde él hasta el punto B en la b y es igual a la distancia entre las rectas a y b. Hallen el ángulo entre la perpendicular común y la recta AB.

661. En el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se han trazado en las aristas AA_1 y DD_1 P y Q, respectivamente, que son sus puntos medios. Hallen el ángulo entre los rayos DP y QC_1.

662. En el tetraedro regular $SABC$ hallen el ángulo entre la mediana AM de la cara SAB y el rayo SC.

663. En la pirámide triangular regular $SABC$ todos los ángulos planos en el vértice S son rectos. Hallen el ángulo entre los rayos CP y SD si P y D son los puntos medios de las aristas SA y BC, respectivamente.

664. En la pirámide cuadrangular $SABCD$ la base $ABCD$ es un paralelogramo entre cuyos lados la razón es $AB : BC = 1 : 2$ y con el ángulo agudo igual a 60°. La cara SAB de la pirámide es perpendicular al plano de la base y es un triángulo regular. Hallen el ángulo entre la mediana DM de la cara SAD y la apotema SK de la cara SAB.

665. En la pirámide cuadrangular $SABCD$ todas las aristas laterales están inclinadas hacia el plano de la base bajo un ángulo de 60°. Por el punto F que divide la diagonal AC de forma que $AF : FC = 1 : 3$ y P, que es el punto medio de la arista SC, se traza una recta. Hallen el ángulo formado entre el rayo FP y la diagonal AC.

666. En el prisma triangular regular $ABCA_1B_1C_1$, cuyas caras laterales son cuadrados, se han trazado las disgonales BA_1, AC_1 y CB_1. Hallen los ángulos entre los rayos AC_1 y BA_1; AC_1 y CB_1; BA_1 y CB_1.

667. En el rectángulo $ABCD$ $AB : BC = 2 : 1$. En los lados AB y CD se han tomado, respectivamente, P y Q que son los puntos medios de dichos lados, mientras que por la recta PQ el rectángulo se ha doblado de forma que el ángulo entre los rayos PB y PA es igual a 60°. Hallen el ángulo entre los rayos DB y AQ.

668. En la pirámide cuadrangular regular $SABCD$ el ángulo entre la arista lateral y el plano de la base es igual a 45°. Hallen el ángulo entre los rayos BP y OL, donde el punto B es el vértice de la base de la pirámide, P, es el punto medio de la altura de la pirámide, el punto O, el centroide de la base y L, el punto medio de la arista SC.

669. Una placa cuadrada $ABCD$ está doblada por la diagonal AC de forma que el plano ABC es perpendicular al plano ACD. El punto K se ha elegido en la diagonal AC de modo que $CK : KA = 1 : 3$. Hallen el ángulo entre los rayos KB y CD.

670. En la pirámide triangular $SABC$ los ángulos planos ASB y CSB en el vértice S son rectos, en tanto que el ángulo ASC es igual a 45°. Hallen el ángulo entre los rayos CK y SD si K y D son los puntos medios de las aristas SA y BC, respectivamente, y $SA = SB = SC$.

671. En la pirámide triangular $SABC$ la base ABC es un triángulo regular. las caras SAB y SBC son perpendiculares al plano de la base y la arista SB es igual al lado de la base. Hallen el ángulo entre los rayos SO y BD, donde

el punto O es el centroide del triángulo ABC y D, el punto medio de la arista SC.

672. Las diagonales no intersecantes de dos caras laterales adyacentes de un paralelepípedo rectangular forman con el plano de la base los ángulos α y β. Hallen el ángulo entre dichas diagonales.

673. En la pirámide cuadrangular regular $SABCD$ el lado de la base $AB = 6$ cm, la altura es igual a 4 cm. Hallen la distancia desde el vértice A hasta el plano de la cara SCD.

674. El segmento AB, cuya longitud es igual a a, es paralelo al plano P. Por los puntos A y B se han trazado rectas perpendiculares al segmento AB y que con el plano P forman ángulos iguales, respectivamente, a α y β. La distancia entre los puntos de intersección de las rectas trazadas y el plano P es igual a b. Hallen la distancia entre el segmento AB y dicho plano.

675. Un segmento, cuya longitud es igual a a, tiene sus extremos en dos planos perpendiculares entre sí y forma con uno de ellos un ángulo igual a 30° y con el otro, a 45°. Hallen la distancia entre las proyecciones de los extremos del segmento dado en la línea de intersección de los planos.

676. En el plano P está situado el triángulo equilátero ABC en el que $AB = a$. En la perpendicular al plano P, que pasa por el punto A, se ha trazado tal segmento AK que $AK = a$. Hallen la distancia entre las rectas AB y CK.

677. Por el extremo superior de la generatriz de un cilindro se traza a éste una tangente bajo un ángulo igual a α. Hallen la distancia desde los centros de las bases del cilindro hasta dicha tangente si la altura del cilindro y el radio de su base son iguales a h y R, respectivamente.

678. En los puntos A y B, pertenecientes al plano P, se elevan las perpendiculares AC y BD a dicho plano por un mismo lado. Demuestren que las rectas BC y AD se intersecan y hallen la distancia desde su punto de intersección hasta el plano P si conocemos que $AC = a$ y $BD = b$.

679. La altura de un prisma cuadrangular regular es igual a h. Hallen la distancia desde el lado de la base, cuya longitud es igual a a, hasta la diagonal del prisma que no lo interseca.

680. La base del prisma recto $ABCDA_1B_1C_1D_1$ es un rombo con lado igual a a y ángulo agudo φ. Hallen la distancia desde el vértice B_1 de la base superior hasta la diagonal A_1D de la cara lateral si la arista lateral del prisma es igual a h.

681. Hallen la distancia entre la diagonal de un cubo y la arista que no la interseca si la arista del cubo es igual a a.

682. Hallen la distancia entre las diagonales no intersecantes de las caras adyacentes de un rombo si su arista es igual a a.

683. En el cilindro equilátero, en el que el radio de las bases es igual a R, un punto de la circunferencia de la base superior se une con un punto de la circunferencia de la base inferior. La recta trazada forma con el plano de la base un ángulo igual a α. Hallen la distancia entre la mencionada recta y el eje de simetría del cilindro.

684. Entre dos planos paralelos se han trazado una perpendicular y una oblicua que forma con cada uno de los planos el ángulo α. Hallen la distancia entre los puntos medios de los segmentos de la oblicua y la perpendicular, contenidos entre los planos dados, si la longitud del segmento de la perpendicular es igual a $2a$ y la distancia entre los extremos de la oblicua y la perpendicular en cada uno de los planos es igual a b.

685. En una pirámide triangular la suma de tres ángulos planos en cada uno de los vértices de la base es igual a 180°. Hallen la distancia entre las aristas cruzadas de la pirámide si los lados de la base son iguales a 4, 5 y 6 cm.

686. Demuestren que si la recta a forma iguales ángulos con tres rectas que no son paralelas entre sí y que yacen en un mismo plano, la recta a es perpendicular a dicho plano.

687. Los ángulos planos de uno de los vértices de una pirámide triangular

son rectos. Demuestren que la altura de la pirámide, trazada desde dicho vértice, pasa por el punto de intersección de las alturas de la cara opuesta.

688. Demuestren que la altura SO de la pirámide triangular $SABC$ interseca la altura AD de la base en aquel y sólo en aquel caso cuando $SA \perp BC$.

689. Demuestren que si una de las alturas de una pirámide triangular pasa por el punto de intersección de las alturas de la cara opuesta, las demás alturas de dicha pirámide poseen esa misma propiedad.

§ 11. ÁNGULOS DIEDROS Y POLIEDROS

EJEMPLO 1. Uno de los ángulos planos de un triedro es igual a 60° y cada uno de los dos restantes, a 45°. Hallemos el ángulo diedro opuesto al plano que contiene los 60°.

SOLUCIÓN. Sea la fig. $SMNL$ (fig. 131) la representación del ángulo triedro dado. Ella es completa. Hallemos su número paramétrico. Considerando el ángulo MSN como la representación del ángulo de 60° consumimos un parámetro; si consideramos que los ángulos MSL y NSL son las representaciones de los ángulos que en el original contienen cada uno 45° se consumen dos parámetros más. Así, pues, hemos consumido un total de tres parámetros, es decir, al efectuar nuevas construcciones de carácter métrico, que pueden ser precisas al determinar el ángulo diedro buscado, es posible emplear dos parámetros más.

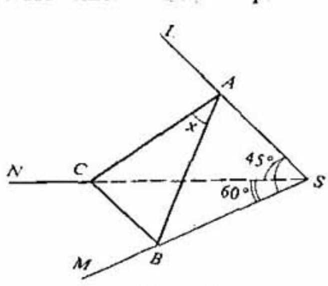


Fig. 131

De modo que $\angle MSN = 60°$, $\angle MSL = \angle NSL = 45°$. Hallemos $\angle SL$ que es un ángulo diedro en la arista SL. Con este fin, construimos, y, a continuación, hallamos su ángulo lineal. Realizamos la construcción del modo siguiente.

En el rayo SL elegimos el punto arbitrario A y en el plano MSL construimos la recta AB que consideraremos como la representación de la perpendicular a la recta SL (consumimos un parámetro). Por analogía vamos a considerar que AC es la representación de la perpendicular al rayo SL (consumimos un parámetro más y, ahora, en la representación hemos consumido los cinco parámetros). Así, pues, $\angle BAC$ es el ángulo lineal buscado del diedro SL.

Realicemos los cálculos necesarios para lo que introducimos un parámetro auxiliar. Hagamos $SA = a$. Entonces de los triángulos rectángulos SAB y SAC hallamos que $AB = a$ y $AC = a$, $SB = SC = a\sqrt{2}$. Como en el $\triangle SBC$ $BC = SB = SC$, $BC = a\sqrt{2}$.

Cerciorémonos de que se cumple la igualdad $AB^2 + AC^2 = BC^2$. En efecto, $AB^2 + AC^2 = 2a^2$ y $BC^2 = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2$. Así, pues, en el $\triangle ABC$ (según el teorema inverso al de Pitágoras) $\angle BAC = 90°$. Por lo tanto, también $\angle SL = 90°$.

OBSERVACIÓN. El problema examinado pudo ser resuelto sin la introducción del parámetro auxiliar. En efecto, como es fácil notar, el $\triangle ABC = \triangle ASB$, por lo que $\angle BAC = \angle SAB = 90°$.

EJEMPLO 2. La base de una pirámide es un triángulo regular. Una de las caras laterales es perpendicular al plano de la base, las otras dos son oblicuas a él bajo un ángulo igual a α. Hallemos los ángulos formados por las aristas laterales con el plano de la base.

SOLUCIÓN. Sea el cuadrilátero $SABC$ con sus diagonales SB y AC la representación de la pirámide dada (fig. 132). Tal representación es completa (cerciórense de esto por su cuenta, tomando el plano ABC, p. ej., como el fundamental.) Calculemos el número paramétrico de la representación. Considerando que el triángulo arbitrario ABC es la representación de un triángulo equilátero, consumimos dos parámetros. Al considerar que el triángulo SAB es la representación de la cara perpendicular al plano de la base en el original, consumimos un parámetro. Suponiendo que los triángulos SAC y SBC son las representaciones de las caras oblicuas al plano de la base bajo ángulos, cada uno de los cuales es igual a α, consumimos un parámetro más. Así, pues, el número paramétrico de la representación que examinamos $p = 4$.

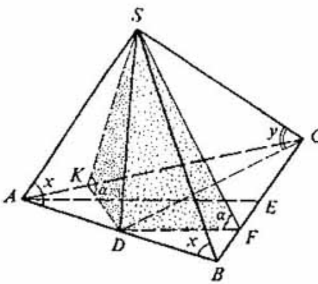


Fig. 132

Con el fin de resolver el problema introducimos en el dibujo los datos y las magnitudes buscadas, para lo que realizamos las construcciones adicionales necesarias.

Ante todo, construyamos el segmento SD que es la apotema de la cara SAB. Entonces, como los planos SAB y ABC son perpendiculares, el segmento SD también es perpendicular al plano ABC y, por ello, AD es la proyección de la arista SA en el plano ABC, es decir, $\angle SAD$ es el ángulo formado por la arista SA con el plano ABC. Por analogía, $\angle SBD$ es el ángulo formado por la arista SB con el plano ABC, $\angle SCD$, el ángulo formado por la arista SC con el plano ABC. Más adelante, señalemos que AE, que es la mediana del triángulo ABC, es también su altura, por lo que, después de construir $DF \parallel AE$, llegamos a la conclusión de que $DF \perp BC$ y, por lo tanto, DF es la proyección del segmento SF en el plano ABC *). De este modo, $SF \perp BC$ y $\angle SFD$ es el ángulo lineal del diedro BC, o sea, $\angle SFD = \alpha$. De forma análoga, al haber construido $DK \perp AC$ llegamos a la conclusión que $\angle SKD = \alpha$. Además, los triángulos rectángulos SDF y SDK tienen un cateto común SD e iguales ángulos agudos SFD y SKD, es decir, esos triángulos son iguales. Entonces, $DF = DK$. Esto significa que el punto D es equidistante de los lados del ángulo ACB. Así, pues, el punto D yace en la bisectriz del ángulo ACB del triángulo regular ABC. Pero la bisectriz del ángulo de un triángulo regular es, al mismo tiempo, su mediana y altura. Así, que CD es la mediana del $\triangle ABC$, o sea, D es el punto medio del lado AB y, por consiguiente, SD, que es la altura del $\triangle SAB$, es asimismo su mediana. Esto quiere decir que el $\angle SAB$ es isósceles, o sea, $\angle SBD = \angle SAD$.

Ahora, podemos pasar a los cálculos. Introducimos un parámetro auxiliar, haciendo $AB = a$ y, para abreviar, hacemos $\angle SBD = x$, $\angle SCD = y$. Entonces, también $\angle SAD = x$. Es evidente, que $BD = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}$. A continuación, como AE es la mediana del $\triangle ABC$ y FD, la línea media del $\triangle ABE$, $DF = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Del triángulo rectángulo SDF tenemos: $SD = DF \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{4} \operatorname{tg} \alpha$.

Así, pues, $\operatorname{tg} x = \frac{SD}{BD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \alpha$, de donde $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \alpha\right)$. Más adelante, $\operatorname{tg} y = \frac{SD}{CD} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$, de donde $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha\right)$.

EJEMPLO 3. El ángulo diedro en la arista lateral de una pirámide cuadrangular regular es igual a α. Hallemos el ángulo diedro en la arista de la base de dicha pirámide.

SOLUCION. Sea la figura $SABCD$ la representación de la pirámide dada (fig. 133). Ésta es completa (cerciórense de ello por su cuenta). Calculemos su número paramétrico. Considerando que el paralelogramo $ABCD$ es la representación de un cuadrado, consumimos dos parámetros. Sea O el punto de intersección de las diagonales de la base. Si consideramos que el segmento SO es la representación de la altura de la pirámide, consumimos dos parámetros más. Por fin, suponiendo que el ángulo entre las aristas laterales, p. ej. SBC y SDC, es la representación del ángulo diedro, cuyo valor en el original es igual a α, consumimos otro parámetro. Así, pues, para la representación de la pirámide dada hemos consumido los cinco parámetros.

*) (Presten atención. Para la construcción $DF \perp BC$ no es necesario consumir parámetros, aunque ella es también métrica).

Para resolver el problema es preciso efectuar ciertas construcciones adicionales que, en particular, nos permitirán introducir en el dibujo los ángulos dado y buscado. (En principio, en la representación métricamente definida que tenemos, al azar no se pueden realizar construcciones métricas. No obstante, en el caso que analizamos al verificar construcciones métricas son tolerables exclusiones, ya que el ángulo en la arista lateral de la pirámide está prefijado con un parámetro cuyo valor, como es fácil de advertir, pertenece al intervalo]90°; 180°[. Nosotros haremos uso de esta circunstancia.)

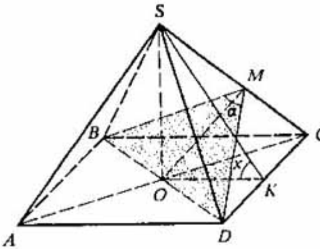


Fig. 133

Tomemos en la arista SC el punto M y vamos a considerar que el segmento OM es la representación de la perpendicular a la arista SC. A continuación, construyamos los segmentos DM y BM. Como $BD \perp AC$ y $BD \perp SO$, $BD \perp SC$. De modo que $SC \perp BD$ y $SC \perp OM$, es decir, $SC \perp DM$ y $SC \perp BM$. Entonces, $\angle BMD$ es el ángulo lineal del diedro SC y, por lo tanto, $\angle BMD = \alpha$. Además es posible mostrar que el segmento OM, siendo la mediana del triángulo BMD, es asimismo su bisectriz y altura. Por ello, $\angle BMO = \angle DMO = \frac{\alpha}{2}$ y $OM \perp BD$. Además, construyamos SK, la apotema de la cara SDC y OK, la mediana del triángulo OCD. Como los triángulos SCD y OCD son isósceles, $SK \perp CD$ y $OK \perp CD$, o sea, $\angle SKO$ es el ángulo lineal del diedro en la arista CD. Ahora, pasemos a los cálculos. Introduzcamos un parámetro auxiliar haciendo $CD = a$ y, para abreviar, tomando $\angle SKO = x$.

Como en el triángulo rectángulo DOM $DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $DM = \frac{a\sqrt{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$.

Ahora, calculemos SK. Como el $\triangle SCK \backsim \triangle CDM$, $\frac{SK}{SC} = \frac{DM}{CD}$, donde $SC = \sqrt{SK^2 + \frac{a^2}{4}}$, $DM = \frac{a\sqrt{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$ y $CD = a$.

Así, pues, $SK = \frac{\sqrt{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\sqrt{SK^2 + \frac{a^2}{4}}$, de donde $SK = \frac{a}{2\sqrt{-\cos\alpha}}$.

Entonces, del triángulo rectángulo SOK, hallamos que $\cos x = \frac{OK}{SK} = \sqrt{-\cos\alpha}$, es decir, $x = \arccos\sqrt{-\cos\alpha}$.

PROBLEMAS PARA EL TRABAJO INDIVIDUAL

690. Dos ángulos planos del triedro son iguales a 45° cada uno, en tanto que el diedro entre ellos es recto. Hallen el tercer ángulo plano.

691. Uno de los ángulos planos del triedro es igual a 90° y los otros dos, a 60° cada uno. Hallen el ángulo entre el plano que corta las aristas del ángulo triedro en segmentos iguales.

692. Los ángulos planos del triedro son iguales a 45, 45 y 60°. Por su vértice se ha trazado una recta perpendicular a las aristas del ángulo plano igual a 45°. Hallen el ángulo entre dicha recta y la arista del ángulo diedro que no yace en la mencionada arista.

693. Las aristas SAB y SBC del ángulo triedro $SABC$ forman un ángulo recto, en tanto que los dos ángulos diedros son cada uno igual a α. Hallen el ángulo plano ASC.

694. Por un punto tomado en la arista de un ángulo diedro igual a α, se ha trazado a una de las aristas un rayo que forma con la arista el ángulo β y, a la otra arista, un rayo perpendicular a ella. Hallen el ángulo entre los dos rayos.

695. Dentro de un ángulo triedro, en el que todos los ángulos planos son iguales a 2α, por su vértice, se ha trazado un rayo que es igualmente oblicuo a las aristas del ángulo diedro. Hallen el ángulo de inclinación de este rayo con relación a cada arista.

696. Los ángulos planos de un triedro son iguales a α, β y γ. Hallen sus ángulos diedros.

697. En el rectángulo $ABCD$ $AB : BC = a : b$. Por el lado AD se traza el plano P con el que la diagonal del rectángulo forma un ángulo igual a 30°. Hallen el ángulo diedro entre el plano del rectángulo y el plano P.

698. Por el punto A del plano P se traza la recta oblicua AB que con P forma un ángulo α. Por AB se ha trazado el plano Q que con P constituye el ángulo β. Hallen el ángulo entre la recta AB y la línea de intersección de los planos P y Q.

699. Por la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo se ha trazado un plano que con el plano del triángulo forma el ángulo α. Hallen los ángulos que forman los catetos del triángulo con dicho plano.

700. En el tetraedro regular $SABC$, por la mediana AD de la base y K, que es el punto medio de la arista SB, se ha trazado un plano. Hallen el ángulo diedro entre dicho plano y el de la base.

701. En el prisma triangular regular $ABCA_1B_1C_1$ todas las aristas son iguales. Por la arista AA_1 y D_1, que es el punto medio de la arista B_1C_1, se ha trazado un plano. Hallen el ángulo diedro entre el mencionado plano y el plano AD_1C.

702. En la pirámide triangular regular el lado de la base es tres veces menor que la arista lateral. Hallen el ángulo diedro en la arista lateral.

703. En la pirámide cuadrangular regular el ángulo de inclinación de la arista respecto al plano de la base es igual a α. Hallen el ángulo diedro en la arista lateral.

704. La base de una pirámide es un cuadrado. Hallen los ángulos diedros formados por las aristas laterales, entre las que existe la razón $1 : 2 : 4 : 2$, con el plano de la base.

705. En una pirámide triangular regular el ángulo diedro junto a la arista de la base es igual a α. Hallen el ángulo de inclinación de la arista lateral con respecto a la base.

706. El ángulo diedro en la arista lateral de una pirámide triangular regular es igual a α. Hallen el ángulo diedro entre el plano de la base y la cara lateral de la pirámide.

707. En una pirámide triangular regular el ángulo diedro entre la cara lateral y el plano de la base es igual a α. Hallen el ángulo diedro entre las caras la erales.

708. Demuestren que si todos los ángulos diedros de una pirámide triangular son iguales, asimismo son iguales todas las aristas.

709. En la pirámide triangular $SABC$ las caras SAC y SAB son triángulos rectángulos isósceles con la hipotenusa SA común. El ángulo diedro de la arista SA es igual a α. Hallen los ángulos diedros de las aristas SB y SC.

710. La base de la pirámide $SABCD$, todas las aristas laterales de la cual están inclinadas de igual modo respecto al plano de la base, es el rectángulo $ABCD$. Por F, K y L, que son los puntos medios de las aristas AB, AD y SC, se ha trazado un plano. Hallen el ángulo diedro que este plano forma con el de la base si $AB : AD : SA = 1 : \sqrt{3} : 2$.

711. La base de una pirámide es un cuadrado. Dos aristas laterales son perpendiculares al plano de la base y las otras dos, constituyen con él un ángulo igual a α. Hallen el ángulo diedro entre las caras laterales que no son perpendiculares al plano de la base.

712. La altura de una pirámide n-angular regular es dos veces menor que el lado de la base. Hallen el ángulo entre la cara lateral y el plano de la base.

713. En una pirámide n-angular regular el ángulo entre la arista lateral y la arista de la base, adyacente a la primera, es igual a α. Hallen el ángulo diedro formado por la cara lateral con el plano de la base.

714. En la pirámide n-angular regular el ángulo diedro en la arista lateral es igual a 2α. Hallen el ángulo de inclinación de la arista lateral hacia el plano de la base de la pirámide.

715. En una pirámide n-angular regular el ángulo diedro en la arista lateral es igual a 2α. Hallen el ángulo diedro en la arista de la base de la pirámide.

716. Dos rectángulos iguales $ABCD$ y ABC_1D_1 tienen el lado común AB y sus planos forman un ángulo diedro igual a 60°. Hallen el ángulo entre las diagonales AC y BD_1 si $AB : AD = 1 : 2$.

717. Dos rombos iguales $ABCD$ y ABC_1D_1 tienen el lado común AB, mientras que sus planos forman un ángulo diedro igual a 45°. Hallen el ángulo entre los lados BC y BC_1 de los rombos si el ángulo agudo de cada uno de ellos es igual a 60°.

718. El paralelepípedo $ABCD$, en el que AC es la menor diagonal y $AB : AC : BC = 1 : 1 : \sqrt{2}$, está doblado por la diagonal AC de modo que el ángulo BAD es igual a 60°. Hallen el ángulo diedro formado por los planos de los triángulos ABC y ADC.

719. En el paralelogramo $ABCD$ el ángulo agudo es igual a 60° y $AB : BC = 2 : 1$. En el lado AB se toma P y en el CD, Q que son los puntos medios de estos lados. Después de doblar el paralelogramo por la recta PQ los planos PQC y PQD forman un ángulo diedro igual a 45°. Hallen el ángulo agudo entre las rectas AP y BP.

720. En la pirámide triangular regular $SABC$ el ángulo diedro en la arista de la base es igual a 45°. Hallen el ángulo entre la mediana CD de la cara SAC y el plano SAB.

721. La base de una pirámide cuadrangular es un rombo con ángulo agudo de 60°. Cada cara lateral está inclinada hacia el plano de la base bajo un ángulo de 45°. Hallen los ángulos que forma la altura de la cara lateral con las diagonales de la base.

722. La base de la pirámide $SABCD$ es el cuadrado $ABCD$, la cara SAB, perpendicular al plano de la base, es un triángulo isósceles, mientras que las aristas laterales SC y SD forman, cada una de ellas, con el plano de la base un ángulo de 45°. Hallen el ángulo diedro en la arista lateral SD.

723. En el plano de la base de un cono equilátero (fuera de ella) se ha tomado un punto alejado de la circunferencia de la base a una distancia igual al radio de la base. Por dicho punto se trazan hacia el cono dos planos tangentes. Hallen el ángulo diedro entre ellos.

§ 12. SECCIONES DE POLIEDROS

Los problemas relacionados con la necesidad de representar las secciones han de dividirse en dos tipos:

1) los problemas en los que se dice que *es preciso construir* la sección;

2) los problemas en los que se dice (o se sobreentiende) que la *sección ya está construida.*

Al resolver los problemas del primer tipo la construcción de la sección se acompaña de la descripción del proceso de la construcción que se realiza bien según el esquema completo de resolución del problema dado (análisis, construcción, demostración, investigación), o bien (en casos más sencillos), según un esquema algo simplificado (p. ej., se omite el análisis, la construcción se simultanea con la demostración). La investigación del problema para la construcción de la sección no se debe confundir con la investigación de la solución de los problemas para calcular ciertas magnitudes ligadas con la presencia de la sección. P. ej., el problema de la construcción de la sección diagonal de un cubo o un paralelepípedo rectangular tiene seis soluciones; en lo que atañe al problema para calcular el área de la sección diagonal del cubo, sólo tiene una solución, mientras que cuando se trata del paralelepípedo rectangular, tres.

Al resolver los problemas del segundo tipo se opera de modo algo diferente: si para la representación del poliedro prefijado junto con la sección se consume no más de cinco parámetros, la construcción de la sección no se describe (aunque, como es lógico, para resolver el problema la construcción de la sección ha de realizarse); pero si los cinco parámetros han sido consumidos antes de construir la sección, la construcción necesaria para representarla, ha de describirse. Semejante descripción se hace de la misma forma que la de cualesquiera otras construcciones realizadas con una representación métricamente definida.

Al resolver los problemas tanto del primer tipo como del segundo, hay que cerciorarse de la plenitud de la representación en la que debe construirse la representación de la sección (para los problemas del primer tipo) o en la que está representada la sección (para los problemas del segundo tipo). (Recordemos que en la representación completa es resoluble cualquier problema de posición.) Además, como, por regla, se sabe de antemano si en el proceso de la resolución será posible limitarse sólo a las construcciones de posición o bien será necesario realizar, asimismo, métricas, hay que calcular también el número paramétrico de la representación.

Pasemos a estudiar los problemas del primer tipo. Primero, detengámonos en la construcción de la sección según el método de la traza del plano secante. (Recibe el nombre de *traza* del plano secante una recta obtenida en la intersección de dicho plano secante con cierto plano elegido en la representación.

EJEMPLO 1. En las aristas del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se dan tales puntos P, Q y R que $AP = \frac{1}{3}AA_1$, $B_1Q = \frac{1}{2}B_1C_1$ y $CR = \frac{1}{3}CD$. Construyamos la sección del cubo con el plano PQR.

SOLUCIÓN. Primero aclaremos si el problema planteado es resoluble. Sea la figura $ABCDA_1B_1C_1D_1$ la representación de un cubo (fig. 134). Ella es completa. También está claro que teniendo en la representación los puntos P, Q, y R, que son las proyecciones de los puntos P_0, Q_0 y R_0, es posible hallar asimismo las proyecciones secundarias de los puntos P_0, Q_0 y R_0. Con este fin es suficiente efectuar en el plano de imagen la proyección paralela interior, p. ej., en la dirección paralela a AA_1. De esta forma, hallaremos los puntos P_1, Q_1 y R_1 y llegaremos a la conclusión de que la representación del plano secante es la prefijada. Entonces, el problema de hallar la intersección del plano, prefijado con los puntos P, Q y R, con la superficie del cubo es resoluble.

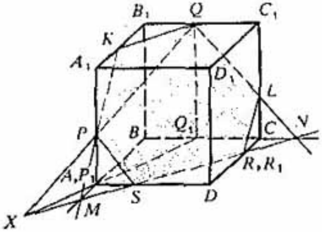


Fig. 134

Pasamos, directamente, a la construcción de la sección (como, por regla, decimos la construcción de la sección aunque se trata de construir la representación de la sección). La primera etapa del esquema general de resolución de un problema de construcción, es decir, el análisis, será omitida en el presente ejemplo, mientras que las etapas segunda y tercera, o sea la propia construcción y la demostración, se realizará simultáneamente.

Ante todo, hallemos la traza del plano secante, es decir, la línea de intersección del plano PQR con el plano ABC (los puntos P_1, Q_1 y R_1 se han tomado en el plano ABC).

1) Hallemos el punto X en el que se cortan las rectas PQ y P_1Q_1. Como el punto X yace en la recta PQ y ésta se encuentra en el plano secante PQR, X yace en PQR. Por analogía, ya que el punto X yace en la recta P_1Q_1, él yace en el plano ABC. Así, pues, X es un punto común de los planos PQR y ABC. Asimismo el punto R es un punto común de los mencionados planos. Entonces, XR es la recta por la que los planos PQR y ABC se intersecan.

2) Construyamos la recta XR que es la traza del plano secante.

3) Hallemos el punto S en el que concurren las rectas RX y AD.

4) Unimos los puntos P y S.

5) Hallemos el punto M en el que concurren las rectas RX y AB.

Como el punto M yace en la recta RX y ésta se encuentra en el plano secante PQR, el punto M yace en dicho plano. Por analogía, ya que el punto M yace en la recta AB, mientras que ésta se encuentra en el plano ABB_1, el punto M es un punto común del plano secante y del plano de la cara lateral ABB_1 del cubo.

6) Construimos la recta MP por la que se cortan los planos PQR y ABB_1.

7) Hallemos el punto K en el que la recta MP corta la recta A_1B_1.

8) Unimos los puntos K y Q.

9) A continuación, hallamos el punto N que es el punto de intersección de las rectas RX y BC.

10) Construimos la recta QN.

11) Hallamos el punto L en el que concurren las rectas QN y CC_1.

12) Unimos los puntos L y R.

Como de acuerdo con la construcción los vértices del poliedro $SPKQLR$ son puntos que yacen también en el plano secante PQR y en las aristas del cubo, el mencionado poliedro es la sección buscada. Como según el sentido del problema los puntos P, Q y R no yacen en esa misma recta, el problema tiene una sola solución.

EJEMPLO 2. Se han dado el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ y tales puntos P, Q y R que $AP = \frac{1}{3} AA_1$, $B_1Q = \frac{1}{2}B_1C_1$ y el punto R es el centroide de la cara DD_1C_1C. Construyamos la sección del cubo con el plano PQR.

SOLUCIÓN. Como en el anterior ejemplo, hallamos los puntos P_1, Q_1 y R_1 y mostramos que la representación es completa. Hallando la traza del plano secante (fig. 135, *a*) obtenemos la sección buscada.

Examinemos en este ejemplo otro método de construcción de las secciones llamado *método de proyección interna*. Realicemos la construcción (fig. 135, *b*).

1) Construimos las rectas PR y P_1R_1.

2) Hallamos el punto M_1 de intersección de P_1R_1 y Q_1D.

3) Por el punto M_1 trazamos la recta $m \parallel AA_1$.

4) Hallamos el punto M de intersección de las rectas m y PR.

5) Hallamos el punto F de intersección de QM y DD_1.

El punto F yace en el plano secante PQR. En efecto, el punto M yace en la recta PR, es decir, M yace en el plano PQR. Pero, asimismo, el punto Q yace en el plano PQR. Esto significa que la recta MQ yace en el plano PQR, pero, en tal caso, el punto F de la recta MQ también yace en el plano PQR. Después de hallar el cuarto punto perteneciente tanto al plano secante como al plano de la sección del cubo, la construcción se puede realizar del siguiente modo.

6) Unimos los puntos P y F.

7) Hallamos el punto L de intersección de las rectas FR y CC_1.

8) Construyamos la recta QL.

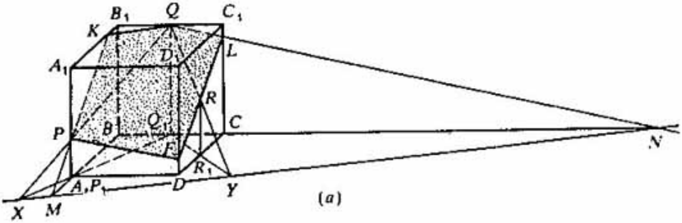
9) Hallamos el punto N de intersección de las rectas QL y BB_1.

10) Hallamos el punto K de intersección de las rectas NP y A_1B_1.

11) Unimos los puntos K y Q.

El poliedro $PKQLF$ obtenido es la sección buscada.

Los métodos descritos más arriba de la traza del plano secante y de la proyección interior también se aplican al construir las seccio-



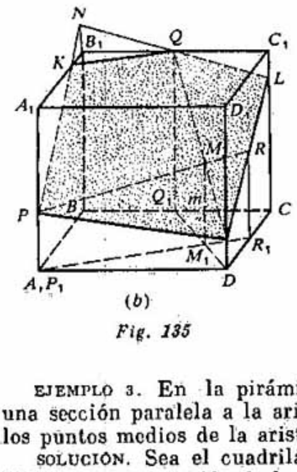


Fig. 135

nes de una pirámide. En este caso se efectúa la proyección central. En la fig. 136, *a* la sección de la pirámide con el plano PQR se ha construido con ayuda de la traza XY del plano secante, mientras que en la fig. 136, *b*, mediante el método de la proyección interior.

Los procedimientos para prefijar las secciones de los poliedros son los más diversos. P. ej., el plano secante puede ser dado con ayuda de dos puntos y cierta recta con la que la sección dada es paralela o perpendicular, con dos puntos y un plano con el que la sección dada es paralela o perpendicular.

EJEMPLO 3. En la pirámide triangular regular $SABC$ tracemos una sección paralela a la arista SB y que pasa por P y Q que son los puntos medios de la aristas AB y BC, respectivamente.

SOLUCIÓN. Sea el cuadrilátero $SABC$, con sus diagonales AC y SB, la representación de la pirámide dada (fig. 137). Ella es completa. Con dos puntos P y Q y la recta SB se determina con plenitud el plano secante. De este modo, el problema de la construcción en esta representación es resoluble.

Pasemos a la construcción de la sección. Para abreviar designemos el plano secante con β. Como el punto P yace en la arista AB él yace asimismo en el plano ABC. De la misma forma, el punto Q yace en el plano ABC. Pero los puntos P y Q también yacen en el

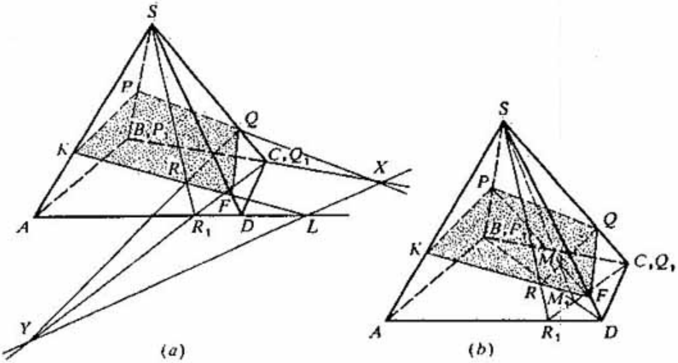


Fig. 136

plano secante β. Así, pues, los planos β y ABC se cortan por la recta PQ. Bueno y, ahora, realicemos la construcción.

1) Unamos los puntos P y Q. Como $SB \parallel \beta$, el plano SAB, que pasa por la arista SB, intersecará β por la recta que pasa por P y es paralela a la arista SB.

2) Por esta razón, en el plano SAB, por el punto P, trazamos la recta $PK \parallel SB$.

3) De forma análoga construimos $QM \parallel SB$.

4) Unimos los puntos K y M.

El cuadrilátero $PKMQ$ satisface las condiciones del problema y, por lo tanto, es la sección buscada. También es fácil cerciorarse de que la sección requerida existe, con la particularidad de que ella es sólo una.

OBSERVACIÓN. La diversidad de los procedimientos para prefijar el plano secante no permite aplicar para la construcción de la sección cierto procedimiento universal. P. ej., en los ejemplos 1 y 2 de este párrafo pudieron ser aplicados los métodos de la traza del plano secante y de la proyección interna. En el ejemplo 3 ninguno de estos métodos hubiera sido eficaz.

Supongamos que con las condiciones del ejemplo 3, el lado de la base de la pirámide es igual a a y la arista lateral, a b. Hallemos el área de la sección. Con este fin, necesitaremos aclarar la forma de la sección (tipo del cuadrilátero $PKMQ$). Ahora $p = 5$; por lo tanto, no es posible realizar al azar cualesquiera construcciones métricas en la representación que tenemos. Pero, todas las posteriores construcciones son de posición.

Como de acuerdo con la construcción $PK \parallel SB$ y $QM \parallel SB$, $PK \parallel QM$. Además, PK es la línea media del $\triangle SAB$, es decir, $PK = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}b$. Análogamente, $QM = \frac{1}{2}b$. Por esta razón, $PK = QM$ y, entonces, el cuadrilátero $PKMQ$ es un paralelogramo, con la particularidad de que $PK = \frac{b}{2}$, $PQ = \frac{a}{2}$. Para calcular el área del paralelogramo, los datos de que disponemos son insuficientes, por ello precisamos la forma del paralelogramo $PKMQ$. Construyamos BL, la mediana del $\triangle ABC$ (semejante construcción no requiere el consumo de parámetros).

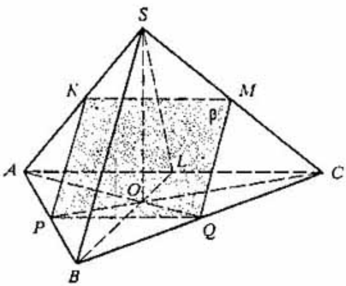


Fig. 137

El punto O, que es la base de la altura SO de la pirámide, yace en la mediana BL. Como $OL \perp AC$ y OL es la proyección del segmento SL en el plano ABC, $SL \perp AC$. Esto significa que $AC \perp OL$ y $AC \perp SL$. Pero en tal caso $AC \perp SB$. (Esto demuestra que las aristas cruzadas de la pirámide triangular regular son perpendiculares entre sí.)

Después, ya que $PQ \parallel AC$ y $PK \parallel SB$, $PQ \perp PK$, o sea, el paralelogramo $PKMQ$ es un rectángulo. De este modo obtenemos $S_{PKMQ} = \frac{ab}{2}$.

EJEMPLO 4. La base de la pirámide $SABC$ es el triángulo rectángulo ABC. La arista SA es perpendicular al plano de la base, $SA = AB = BC = a$. Por el punto M la mitad de la arista AB, perpendicular a la arista SC, tracemos un plano secante y hallemos el área de la sección obtenida.

SOLUCIÓN. Sea el cuadrilátero $SABC$ con sus diagonales SB y AC la representación de la pirámide dada (fig. 138). Ella es completa. Su número paramétrico $p = 5$ (cerciórense de ello por su cuenta). Ahora, pasemos a la construcción de la sección.

Realicémosla en dos etapas. Primero construyamos un plano secante auxiliar perpendicular a la arista SC que pasa por el vértice A. Después de esto, será fácil construir también el plano requerido como un plano paralelo al auxiliar que pasa por el punto M.

1) Construyan la mediana AD del triángulo SAB. Es evidente que como en el triángulo SAB $SA = AB$, $AD \perp SB$.

2) Construyan $AE \perp SC$. Ya que en la pirámide hemos consumido 5 parámetros, está claro que al tomar en SC el punto E al azar no podemos decir que $AE \perp SC$. Operemos del modo siguiente. Del triángulo isósceles rectángulo ABC hallemos que $AC = a\sqrt{2}$ y del triángulo rectángulo SAC hallemos que, entonces, $SC = a\sqrt{3}$. Así pues, para que el segmento AE sea la representación de la perpendicular a la arista SC debe realizarse la siguiente igualdad:

$$SA^2 - SE^2 = AC^2 - CE^2 \text{ o bien } a^2 - SE^2 = 2a^2 - (a\sqrt{3} - SE)^2,$$

de donde hallamos que $SE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, es decir, $SE : SC = 1 : 3$.

De modo que en la arista SC construimos el punto E tal que $SE : SC = 1 : 3$, a continuación, los puntos A y D se unen con el punto E.

Demostremos que SC es perpendicular al plano ADE. Primero, de acuerdo con la construcción $AE \perp SC$ y, segundo, como nos cercioraremos de inmediato, $AD \perp SC$. En efecto, como SA es pespendicular al plano ABC, AB será la proyección de SB en el plano ABC. Pero $AB \perp$ $\perp BC$, es decir también $SB \perp BC$. De forma que $BC \perp AB$ y $BC \perp SB$, lo que significa que $BC \perp AD$ o bien que $AD \perp BC$. Pero, además, $AD \perp SB$, lo que quiere decir que la recta AD es perpendicular a cualquier recta que yazca en el plano SBC y, en particular, $AD \perp SC$. Así, pues, hemos demostrado que SC es perpendicular al plano ADE.

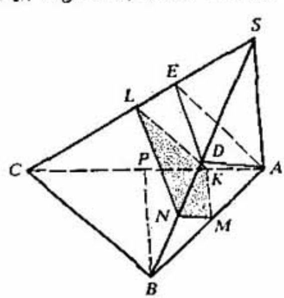


Fig. 138

Pasemos ahora a la segunda etapa de construcción.

3) En el plano SAB, por el punto M, trazamos $MN \parallel AD$.

4) En el plano SBC, por el punto N, trazamos $NL \parallel DE$.

5) En el plano SAC, trazamos $LK \parallel AE$.

6) Trazamos MK.

Es evidente, que como $MN \parallel AD$ y $NL \parallel DE$ y las rectas AD y DE determinan un plano, las rectas MN y NL asimismo determinan un plano. De modo que el cuadrilátero $MNLK$ es plano. Además, de acuerdo con la construcción el plano MNL es paralelo al plano ADE, o sea, el plano MNL es perpendicular a la arista SC. Así, la sección $MNLK$ satisface las condiciones del problema.

Ahora podemos pasar a la determinación de S_{MNLK}, es decir, el área de la sección. Con el fin de calcularla, para empezar hallemos el tipo del cuadrilátero $MNLK$. Del triángulo rectángulo SAB, donde $SA = AB = a$, hallamos con facilidad que $MN = \frac{1}{2}AD = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Examinemos el triángulo SBC. En él $\angle SBC = 90°$, $SB = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $SC = a\sqrt{3}$. A continuación, en el triángulo SNL $SN = \frac{3}{4}SB = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$ y $NL \parallel DE$, pero $DE \perp SC$ (ya que SC es perpendicular al plano ADE), es decir, también $NL \perp SC$. En tal caso, el $\triangle SLN \backsim \triangle SBC$, por lo que $\frac{NL}{BC} = \frac{SN}{SC}$, de donde $NL = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ y $\frac{SL}{SB} = \frac{SN}{SC}$, de donde $SL = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Más adelante, $\triangle SAC \backsim \triangle CLK$ y, entonces, $\frac{LK}{SA} = \frac{CL}{AC}$, de donde $LK = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Y por fin, del triángulo AMK que es rectángulo, ya que SC es perpendicular al plano MNL, o sea, $SC \perp MK$ y, claro está que también AC será la proyección de SC en el plano ABC, perpendicular a MK. Es asimismo evidente que $MK = AM$ y $AM = \frac{a}{2}$. En tal caso, $MK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Así, pues, hemos calculado todos los lados del cuadrilátero $MNLK$ y obtenido que $MN = MK$ y $NL = NK$. Entonces, $\triangle MNL = \triangle MLK$ y $S_{MNLK} = 2S_{\triangle MKL}$. Pero $MK \perp LK$, es decir, $S_{MNLK} = 2 \cdot \frac{1}{2} MK \cdot LK = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

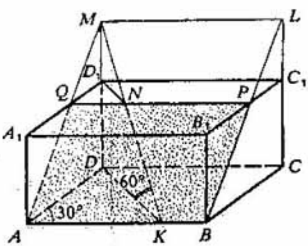


Fig. 139

Consideremos los problemas del segundo tipo.

EJEMPLO 5. La base de un prisma recto, cuya altura es igual a 1 cm, es un rombo con lados iguales a 2 cm y ángulo agudo de 30°. Por un lado de la base se traza un plano secante entre el cual y el plano de la base se forma un ángulo igual a 60°. Hallemos el área de la sección.

SOLUCIÓN. Sea la figura $ABCDA_1B_1C_1D_1$ la representación del prisma dado (fig. 139). Ella es completa. Su número paramétrico $p = 5$ (calculen esto por su cuenta).

Como en este ejemplo la construcción de la sección es un problema métrico y $p = 5$, habiendo tomado al azar en la recta DD_1 el punto M

y en la recta CC_1, el punto L (claro está, tales que $ML \parallel AB$), no se puede afirmar que el cuadrilátero $AMLB$ es la representación de la sección prefijada. No obstante, si conociéramos la posición del punto M de intersección del plano secante con la arista DD_1, podríamos construir con facilidad la representación de la sección.

Si del punto D bajamos la perpendicular DK a la arista AB, en el triángulo rectángulo ADK obtenido, tendremos: $AD = 2$ cm, $DK = 1$ cm y, por lo tanto, $AK = \sqrt{3}$ cm. Así, pues, para construir $DK \perp AB$ debemos elegir el punto K de manera que se cumpla la igualdad $AK : AB = \sqrt{3} : 2$.

Semejante construcción puede realizarse, p. ej., así. Construyamos un ángulo rectángulo auxiliar con la hipotenusa AB y cateto $\frac{1}{2} AB$. Entonces, el segundo cateto será igual a $\frac{\sqrt{3}}{2} AB$. Como $\frac{\sqrt{3}}{2} AB : AB = \sqrt{3} : 2$, AK puede tomarse igual a la longitud del segundo cateto del triángulo auxiliar.

Más adelante, como la arista DD_1 es perpendicular al plano ABC, con cualquier posición del punto M en la arista DD_1 el segmento DK será la proyección del segmento MK en el plano ABC, es decir, $\angle MKD$ será el ángulo lineal del diedro en la arista AB.

Si el punto M es tal que $\angle MKD = 60°$, en el triángulo rectángulo MKD $DK = 1$ cm, $MK = 2$ cm, $MD = \sqrt{3}$ cm. Así, pues, al construir el punto M, hay que tomar en consideración la igualdad $MD : DD_1 = \sqrt{3} : 1$. Podemos, p. ej., realizar la construcción del punto M del modo siguiente. Construyamos el triángulo rectángulo auxiliar con un cateto igual a DD_1 y la hipotenusa, a $2DD_1$. Entonces, la longitud del cateto será igual a $\sqrt{3}\, DD_1$. Pero como $\sqrt{3} DD_1 : DD_1 = \sqrt{3} : 1$, MD se puede tomar igual a la longitud del segundo cateto del triángulo auxiliar.

Después de construir el punto M, tracemos $ML \parallel AB$, donde el punto L yace en la arista CC_1. Habiendo construido la recta AM, hallamos el punto Q de intersección de las rectas AM y A_1D_1 y, de forma análoga, hallamos el punto P. El cuadrilátero $AQPB$ es la representación de la sección dada. Calculemos S_{AQPB}.

Es evidente que el cuadrilátero $AQPB$ es un paralelogramo. Como $MK \perp AB$, NK es la altura del paralelogramo, donde N es el punto de intersección de las rectas MK y PQ. Así, pues, $S_{AQPB} = AB \times NK$. Hallemos NK. En el triángulo rectángulo MDK, tenemos: $MK = 2$ cm, $MD = \sqrt{3}$ cm. Es fácil demostrar que $DK \parallel D_1N$, es decir, $\frac{MK}{NK} = \frac{MD}{DD_1}$ o bien $\frac{2}{NK} = \frac{\sqrt{3}}{1}$, de donde $NK = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm. Así, pues, $S_{AQPB} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm^2.

EJEMPLO 6. En una pirámide triangular regular se ha trazado una sección por la línea media de la cara lateral, paralela a la arista lateral y por el vértice de la base de la pirámide que no yace en la mencionada cara. Determinemos el ángulo de inclinación del plano de la sección con relación al plano de la base si sabemos que el ángulo en la arista lateral de la pirámide y el plano de su base es igual a α.

SOLUCIÓN. Sea el cuadrilátero $SABC$ con sus diagonales la representación de la pirámide dada (fig. 140). Ella es completa y su número paramétrico $p = 5$. Construyamos K y E que son los puntos medios de las aristas BC y SB y, a continuación el $\triangle AEK$, la representación de la sección prefijada de la pirámide (estas construcciones no provocan el consumo de parámetros).

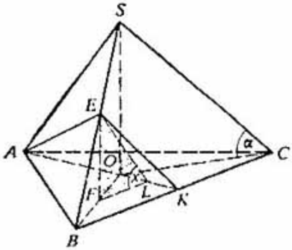


Fig. 140

Como SO es la altura de la pirámide, $\angle SCO$ es igual al ángulo entre la arista lateral y el plano de la base, es decir, $\angle SCO = \alpha$. Es preciso hallar el ángulo diedro formado por el plano secante AEK y el plano de la base. Denominémoslo $\angle AK$.

Con el fin de hallar el ángulo diedro buscado hay que construir y determinar su ángulo lineal. Ya que $p = 5$, en la representación que tenemos no se pueden realizar al azar ninguna clase de construcciones métricas. Es preciso construir la representación de dos perpendiculares a la arista del ángulo diedro. Realicemos la construcción necesaria del modo siguiente.

Construyamos OB y, en el plano SOB, $EF \parallel SO$. Entonces, como SO es perpendicular al plano ABC, asimismo EF será perpendicular a ese mismo plano, por lo que $EF \perp OB$. Como AK es la mediana del triángulo equilátero ABC, $BC \perp AK$. Tracemos $FL \parallel BC$ y, entonces, $FL \perp AK$. Por fin, construyamos EL. Así, pues, $AK \perp$ $\perp FL$ y $AK \perp EF$. Pero, en tal caso, $AK \perp EL$, o sea, $\angle ELF$ es el ángulo lineal del diedro que buscamos. Hagamos $\angle ELF = x$. Para determinar x introducimos el parámetro auxiliar $AB = a$. Ahora, hallemos EF y FL.

Como EK es la línea media del $\triangle SBC$, $BE = SE$. Pero de acuerdo con la construcción $EF \parallel SO$. Por lo tanto, EF es la línea media del $\triangle SOB$ y, por ello, $EF = \frac{1}{2} SO$. Del triángulo rectángulo SOC hallamos que $SO = CO \operatorname{tg} \alpha$, donde $CO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Así, pues, $EF = \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha$. Más adelante, hallamos, que $FL =$

$=\frac{1}{2}BK=\frac{1}{4}a$. De manera que $\operatorname{tg} x=\frac{EF}{FL}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\alpha$, y por lo tanto, $x=\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

OBSERVACIÓN. En el ejemplo que hemos estudiado, a primera vista, puede parecer que la construcción del ángulo lineal del diedro buscado hubiera sido conveniente realizarla así (hagan esto por su cuenta): 1) $OM \parallel BC$; 2) SM, 3) P es el punto de intersección de SM y AE, 4) OF. En efecto, con semejante construcción $\angle POM$ es el ángulo lineal del diedro formado por los planos AEK y ABC. Pero los intentos de determinar $\angle POM$ empleando tal construcción tropieza con considerables dificultades.

En ciertas ocasiones también se tropieza con la necesidad de construir la sección al resolver problemas, en cuyo planteamiento nada se dice acerca de la sección (véase el ejemplo 2 en el § 10). En algunos casos, la construcción de la sección, en principio, no es necesaria, no obstante con su ayuda la solución del problema puede ser simplificada.

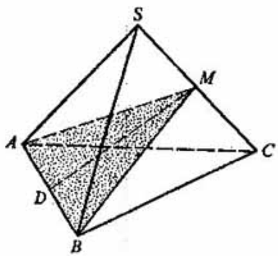


Fig. 141

EJEMPLO 7. Una arista de la pirámide triangular es igual a a, mientras que cada una de las restantes, a b. Hallemos el volumen de la pirámide.

SOLUCIÓN. Sin detenernos en la construcción de la representación (fig. 141) y las otras etapas de la resolución, señalemos que si resolvemos este ejemplo empleando la fórmula $V=\frac{1}{3}S_{\text{base}}H$, al determinar la altura H sería necesario realizar cálculos bastante complicados. Operemos de otro modo. Construyamos la sección de la pirámide con un plano que pasa por la arista AB perpendicular a SC. Si $AB=a$, entonces: $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABM}\,SM+\frac{1}{3}S_{\triangle ABM}\,CM=\frac{1}{3}S_{\triangle ABM}\,SC=\frac{b}{3}S_{\triangle ABM}$.

(Señalemos que la construcción de la sección en el caso dado es un problema de posición, ya que los $\triangle SAC$ y $\triangle SBC$ son equiláteros, es decir, las medianas AM y BM son la representación de las perpendiculares a la arista SC, por lo que el $\triangle ABM$ es asimismo la representación de la sección perpendicular a la arista SC.)

Como $S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}AB\cdot MD$, donde MD es la mediana del triángulo isósceles ABM, en el que $AM=BM=\frac{b\sqrt{3}}{2}$, $S_{\triangle ABM}=$ $=\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{3b^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{4}\sqrt{3b^2-a^2}$. Por lo tanto, $V=\frac{ab}{12}\times$ $\times\sqrt{3b^2-a^2}$.

PROBLEMAS PARA EL TRABAJO INDIVIDUAL

724. En el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$, cuya arista es igual a a, F es el punto medio de la arista D_1C_1. Hallen la distancia desde los puntos A_1, A y C_1 hasta el plano que pasa por los puntos B, F y D.

725. Por la diagonal de la base inferior de un cubo, cuya arista es igual a a, y por el punto medio de uno de los lados de la base superior se traza un plano secante. Hallen la distancia desde el centro del cubo hasta dicho plano.

726. En una pirámide cuadrangular regular tracen un plano por la diagonal de la base paralelo a la arista lateral. Hallen el área de la sección obtenida si los lados de la base y las aristas laterales son iguales a a y b, respectivamente.

727. Cada una de las aristas de una pirámide cuadrangular regular es igual a a. Construyan la sección de la pirámide con un plano que pasa por los puntos medios de dos lados adyacentes de la base y el punto medio de la altura. Hallen el área de esta sección.

728. En un prisma hexagonal regular las caras laterales son cuadrados, cuyos lados son iguales a a. Construyan la sección del prisma con un plano que pasa por un lado de la base inferior y por el lado opuesto a éste de la base superior. Hallen el área de la sección.

729. En un paralelepípedo recto el ángulo agudo de la base es igual a α. La sección del paralelepípedo, trazada por un lado de la base, cuya longitud es igual a a, y la arista opuesta a él tiene un área igual a S y forma con el plano de la base un ángulo igual a $90° - \alpha$. Hallen la longitud del otro lado de la base.

730. La altura de un prisma triangular regular es igual a H. Por una de las aristas de la base y el vértice opuesto de la otra base se ha trazado un plano. Hallen el área del triángulo obtenido en la sección si su ángulo en el indicado vértice del prisma es igual a 2α.

731. En el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ por P y Q, que son los puntos medios de las aristas AB y AD, y el vértice C_1 se traza un plano secante. Hallen la distancia desde el vértice C hasta el plano secante si la arista del cubo es igual a a.

732. El plano secante pasa por el vértice A de la base del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ y por P y Q que son los puntos medios de las aristas B_1C_1 y C_1D_1, respectivamente. Hallen el área de la sección si la arista del cubo es igual a a.

733. El plano secante pasa por el punto K, tomado en la arista AA_1 del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$, y por P y Q que son los puntos medios de las aristas B_1C_1 y C_1D_1, respectivamente. Hallen el área de la sección si la arista del cubo es igual a a y $AK : KA_1 = 1 : 2$.

734. El plano secante pasa por P y Q que son los puntos medios de las aristas AA_1 y CC_1, respectivamente, del prisma triangular regular $ABCA_1B_1C_1$ y el punto D tomado en la arista lateral BB_1 de modo que $B_1D : DB = 3 : 2$. Hallen el área de la sección si cada arista del prisma es igual a a.

735. La base de una pirámide, cada una de cuyas aristas es igual a $a\sqrt{3}$, es el rectángulo $ABCD$ con lados iguales a a y $2a$. Construyan la sección de la pirámide con un plano que pasa por la diagonal BD de la base paralelo a la arista lateral SA. Hallen el área de la sección.

736. La base inferior de un prisma es el rombo $ABCD$, en cuyo vértice el ángulo es igual a 60°. El vértice de la base superior A_1 es equidistante de los vértices A, B y D, la arista $AA_1 = l$ y forma con el plano de la base el ángulo α. Construyan la sección del prisma con un plano que pasa por la diagonal A_1C paralelo a la diagonal BD. Hallen el área de la sección.

737. La base de una pirámide es un triángulo isósceles con lado igual a a. El ángulo de la base de la pirámide es igual a α y cada arista lateral es oblicua al plano de la base bajo el ángulo β. Construyan la sección de la pirámide con un plano que pasa por la altura de ésta y el vértice de uno de los ángulos igual a α. Hallen el área de la sección.

738. En un tetraedro regular se han trazado dos secciones, cada una de las cuales es paralela a las aristas AB y SC. El área de la parte de la cara SAC situada entre los planos secantes es S cm² mayor que el área de la parte de la cara SAB que se encuentra entre dichos planos. ¿Cuántas veces el área de una sección es mayor que la de la otra?

739. El área de la base qe un paralelepípedo rectangular es igual a S. Por el vértice A_1 de la base superior $A_1B_1C_1D_1$ se traza un plano que interseca las aristas BB_1, CC_1 y DD_1 en los puntos B_2, C_2 y D_2, respectivamente. Hallemos el volumen de la parte del paralelepípedo que está situada debajo del plano secante si sabemos que $CC_2 = c$ y la altura del paralelepípedo es igual a H.

740. La base de la pirámide $SABCD$ es el rombo $ABCD$ en el que $AC = a$, $BD = b$. La arista lateral SA, cuya longitud es igual a c, es perpendicular al plano de la base. Por el punto A y el punto medio de la arista SC tracen un plano paralelo a la diagonal BD. Hallen el área de la sección obtenida.

741. El lado de la base de una pirámide cuadrangular regular es igual a a. Por un lado de la base y el punto medio de la arista lateral, que con ella se cruza, se traza una sección. Hallen la distancia desde el plano de la sección hasta el vértice de la pirámide si su altura es igual a H.

742. En un prisma triangular regular, por uno de los lados de la base, se traza un plano que con el de la base forma el ángulo α. Hallen el área de la sección triangular obtenida si sabemos que el lado de la base es igual a a.

743. El ángulo entre la cara lateral de una pirámide cuadrangular regular y el plano de su base es igual a α. La apotema de la cara lateral es igual a a. Por uno de los lados de la base se traza una sección de la pirámide que forma con el plano de la base el ángulo β. Hallen el área de dicha sección.

744. El lado de la base de una pirámide cuadrangular regular es igual a a. El ángulo entre la arista lateral y la altura de la pirámide es igual a 30°. Construir la sección de la pirámide con un plano que pasa por el vértice de la base perpendicularmente a la arista opuesta. Hallen el área de la sección.

745. La base de un prisma es el cuadrado $ABCD$, cuyos vértices se encuentran a la misma distancia del vértice A_1 de la base superior, $AA_1 = a$, el ángulo entre la arista lateral AA_1 y el plano de la base es igual a 60°. Construyan la sección del prisma con un plano perpendicular a la arista AA_1 y que pasa por el vértice C. Hallen el área de la sección.

746. En una pirámide triangular regular el lado de la base es igual a a. El ángulo entre las aristas adyacentes es igual a 2α. Construyan la sección de la pirámide con un plano, perpendicular a la arista lateral opuesta, que pasa por uno de los lados de la base. Hallen el área de la sección.

747. En una pirámide triangular regular, por la arista de la base de longitud a, se traza una sección perpendicular a la arista lateral opuesta. Hallen el área de la superficie de la pirámide si el plano secante divide la arista lateral en la razón $m : n$.

748. En la pirámide triangular $SABC$ la arista SA es perpendicular al plano ABC, $AC = BC = a$, $AS = AB = a\sqrt{2}$. Por el punto medio de la arista AC se ha trazado un plano perpendicular a la arista SB. Hallen la distancia desde el vértice A hasta dicho plano.

749. En el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ construyan la sección que pasa por el punto B, por M y K que son los puntos medios de las aristas CC_1 y AD, respectivamente. Hallen el ángulo diedro entre el plano de la sección y el plano $ABCD$.

750. Construyan la sección del paralelepípedo rectangular $ABCDA_1C_1B_1D_1$ con un plano que pasa por el vértice A, el punto medio de la arista CD y el centroide de la cara BCC_1B_1. Hallen el ángulo diedro entre el plano de la sección y el plano $ABCD$ si $AB : AD : AA_1 = 2 : 3 : 4$.

751. Construyan la sección del prisma rectangular regular $ABCA_1B_1C_1$ con un plano que pasa por el vértice A, por K y M que son los puntos medios de las aristas BB_1 y CC_1, respectivamente, si $CM : C_1M = 1 : 2$ y $AB : BB_1 = 1 : 3$. Hallen el ángulo diedro entre el plano de la sección y el plano ABC.

752. Construyan la sección de la pirámide cuadrangular regular $SABCD$ (S es el vértice) con un plano que pasa por el punto A, por P, que es el punto medio de la altura SO, y el punto K de la arista SD si $SK : KD = 2 : 1$ y $SB = BD$. Hallen el ángulo diedro entre el plano de la sección y el plano de la base.

753. El ángulo entre la arista lateral y el plano de la base de la pirámide triangular regular $SABC$ (S es el vértice) es igual a α. Construyan la sección de esta pirámide con un plano que pasa por el punto A, P, que es el punto medio de la altura SO y el punto K en la apotema SD de la cara SAC si $SK : KD = 2 : 1$. Hallen el ángulo diedro entre el plano de la sección y el de la base de la pirámide.

754. Un prisma cuadrangular regular está cortado con un plano de forma que en la sección se ha obtenido un rombo, cuyo ángulo es igual a 2α. Hallen el ángulo diedro entre el plano secante y el de la base del prisma.

755. La base de una pirámide es un triángulo isósceles en el que el ángulo entre los lados iguales es igual a α. Cada arista lateral de la pirámide es oblicua con relación al plano de la base bajo un ángulo igual a β. En esta pirámide se traza un plano secante que pasa por la altura de la pirámide y por el vértice del ángulo igual a α. Hallen la razón entre el área de la sección obtenida y el área de la base de la pirámide.

756. La base de un paralelepípedo oblicuo es el rombo $ABCD$ en el que $\angle BAD = 60°$. Cada arista lateral del paralelepípedo forma con el plano de la base un ángulo igual a $60°$, mientras que el plano AA_1C_1C es perpendicular a él. Hallen la razón entre el área de la sección BB_1D_1D y de la sección AA_1C_1C.

757. La base de un paralelepípedo recto es un paralelogramo, entre cuyos lados la razón es $AB : BC = 1 : 2$ y el ángulo en el vértice B es igual a $120°$. Por el punto D y el vértice opuesto de la base superior ha de trazarse un plano secante paralelo a la diagonal AC. Hallen el ángulo formado por este plano con el plano de la base si la razón entre la altura del paralelepípedo y el lado menor de la base es igual a $\sqrt{3} : 1$.

758. La base de una pirámide es el rectángulo $ABCD$, en tanto que la altura de la pirámide se proyecta en el vértice B de la base. $AB : AD : SB = 2 : 3 : 5$. Por la diagonal BD se traza un plano paralelo a una de las aristas de la pirámide que no corta la diagonal BD. Hallen el ángulo de inclinación entre el plano secante y el plano de la base de la pirámide.

759. Una pirámide triangular regular está cortada por un plano que pasa por el vértice de la base y los puntos medios de dos aristas laterales. Hallen la razón entre las áreas de la superficie lateral de la pirámide y del plano de la base si sabemos que el plano secante es perpendicular a una de las caras laterales.

760. En un prisma cuadrangular regular se han trazado dos secciones paralelas entre sí: una pasa por los puntos medios de dos lados adyacentes de la base y el punto medio del eje de simetría del prisma, la otra divide el eje en la razón $1 : 3$. Hallen la razón entre las áreas de la primera y segunda secciones.

761. La base de una pirámide es un triángulo regular con lado a. Una de las caras de la pirámide es perpendicular al plano de la base y ella es un triángulo isósceles con lado lateral igual a b. Hallen el área de la sección de la pirámide que es un cuadrado.

762. Un plano secante divide por la mitad el ángulo diedro de la base de una pirámide cuadrangular. Hallen el área de la sección si el lado de la base de la pirámide es igual a a y el ángulo diedro en la base es igual a 2α.

§ 13. ÁREAS

EJEMPLO 1. La base del prisma $ABCA_1B_1C_1$ es un triángulo en el que $AB = AC$ y $\angle ACB = \alpha$. También sabemos que D es el punto medio de la arista AA_1, $\angle DCA = \beta$ y $CD = b$. Hallemos el área lateral del prisma.

SOLUCIÓN. Sea la figura $ABCA_1B_1C_1$ (fig. 142) la representación del prisma dado. Ella es completa. Calculemos su número paramétrico. Suponiendo que AB y AC son las representaciones de segmentos iguales, consumimos un parámetro; considerando $\angle ACB$ la representación de un ángulo igual en el original a α, consumimos un parámetro más; si consideramos que el segmento AA_1 es la representación de la perpendicular al plano ABC, consumimos dos parámetros y, por fin, suponiendo que $\angle DCA$ es la representación de un ángulo que en el original es igual a β, consumimos otro parámetro. Así, pues, el número paramétrico de la representación que analizamos $p = 5$.

Vamos a considerar que $CD = b$ (con ello, no consumimos nuevos parámetros). Ahora podemos efectuar los cálculos necesarios. Como $ABCA_1B_1C_1$ es un prisma recto, $S_{\text{lat}} = P \cdot H$, donde $P = 2AC + BC$, $H = AA_1$ y el $\triangle ACD$ es rectángulo. $AC = b \cos \beta$, $AD = b \operatorname{sen} \beta$, ya que $AA_1 = 2AD_1$, entonces $AA_1 = 2b \operatorname{sen} \beta$.

Construyamos AE, es decir, la mediana del $\triangle ABC$, es evidente que $AE \perp BC$. Del $\triangle ACE$ rectángulo, hallamos: $CE = AC \cos \alpha = b \cos \beta \cos \alpha$. Entonces $BC = 2b \cos \alpha \cos \beta$.

Así, pues, $S_{\text{lat}} = (2b \cos \beta + 2b \cos \alpha \cos \beta)\ 2b \operatorname{sen} \beta =$

$$= 4b^2 \cos \beta\ (1 + \cos \alpha) \operatorname{sen} \beta = 4b^2 \operatorname{sen} 2\beta \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

De modo que $S_{\text{lat}} = 4b^2 \operatorname{sen} 2\beta \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

EJEMPLO 2. La base de una pirámide es un triángulo equilátero con lado igual a a. Una de las caras laterales, perpendicular al plano de la base, también es un triángulo equilátero. Hallen el área lateral de la pirámide.

SOLUCIÓN. Sea el cuadrilátero $SABC$ con sus diagonales la representación de la pirámide dada (fig. 143). Ella es completa, su número paramétrico $p = 5$ (el $\triangle ABC$ es la representación de un triángulo equilátero, es decir, dos parámetros, el $\triangle SBC$, la representación de un triángulo equilátero, es decir, dos parámetros, el ángulo diedro de la arista BC, la representación de un ángulo recto diedro, o sea, un parámetro).

Como la pirámide no es regular, hallemos el área de su superficie lateral como la suma de las áreas de las caras laterales $S_{\text{lat}} = S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SAC} + S_{\triangle SBC}$. Pero el $\triangle SAB = \triangle SAC$ (por tres lados), es decir, $S_{\text{lat}} = 2S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC}$. Más adelante, si SK es la altura del $\triangle SAB$, $S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} AB \cdot SK$.

Como sabemos, la construcción de una perpendicular a una recta, en el caso general, es métrica. En el ejemplo que estudiamos esta construcción ha de realizarse en una representación definida métricamente, es decir, habiendo tomado al azar en el lado AB el punto K

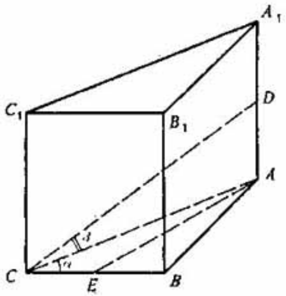


Fig. 142

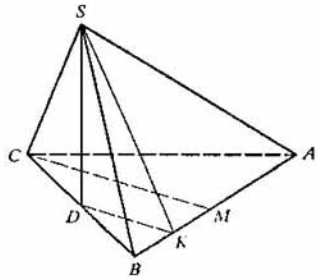


Fig. 143

no podemos considerar que SK es la representación de la perpendicular AB.

Construyamos SK del modo siguiente:

1) Construyamos SD que es la mediana del $\triangle SBC$.
2) Construyamos CM que es mediana del $\triangle ABC$.
3) Por el punto D tracemos $DK \parallel CM$.
4) Unamos los puntos S y K.

Como SD es la mediana del triángulo equilátero SBC, $SD \perp BC$. Pero el plano SBC es perpendicular al plano ABC. Entonces, SD es perpendicular al plano ABC y, por lo tanto, DK será la proyección del segmento SK en el plano ABC. Pero $DK \parallel CM$ y CM es la mediana del $\triangle ABC$ equilátero, es decir, $CM \perp AB$ y, por ello, $DK \perp$ $\perp AB$, es decir, y $SK \perp AB$. Del $\triangle SDK$ rectángulo, tenemos:

$$SK = \sqrt{SD^2 + DK^2}, \quad \text{donde} \quad SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad DK = \frac{1}{2} CM = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Así, pues, $SK = \frac{a\sqrt{15}}{4}$. Obtenemos: $S_{\triangle SAB} = \frac{a^2}{8}\sqrt{15}$ y $S_{\triangle SBC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, por esta razón $S_{\text{lat}} = \frac{a^2}{4}(\sqrt{15} + \sqrt{3})$.

EJEMPLO 3. La base de una pirámide es un trapecio isósceles, cuyos lados paralelos son iguales a a y b ($a > b$). Cada cara lateral es oblicua a la base bajo un ángulo igual a α. Hallen el área total de la pirámide.

SOLUCIÓN. Sea la figura $SABCD$ (fig. 144) la representación de la pirámide dada. Ella es completa. Hallemos su número paramétrico. El cuadrilátero $ABCD$ es la representación del trapecio isósceles prefijado (dos parámetros), SO, la representación de la perpendicular al plano ABC (dos parámetros). Consideremos que $\angle AB$, $\angle BC$, $\angle CD$ y $\angle AD$ son las representaciones de los ángulos diedros, todos los cuales son iguales a α en el original, consumimos sólo un parámetro.

En efecto, supongamos que los segmentos OM y OL son las representaciones de las perpendiculares a los lados AD y DC del trapecio, respectivamente. Entonces estará claro que los segmentos SM y SL serán las representaciones de las perpendiculares a esos mismos lados AD y DC, respectivamente. Por esta razón, los ángulos SMO y SLO serán, respectivamente, las representaciones de los ángulos lineales de los diedros AD y DC. Pero, entonces, los triángulos SMO y SLO serán las representaciones de iguales triángulos, mientras que los segmentos OM y OL, las de iguales segmentos en el original. Del mismo modo si ON y OK son las representaciones de las perpendiculares a los lados BC y AB, entonces ON y OK serán las de segmentos, cuyos originales tienen la misma largura que el segmento OM en el original.

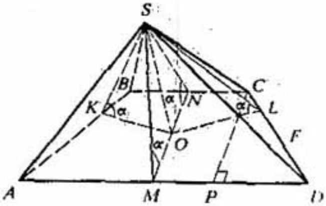


Fig. 144

Así, pues, O es la representación de un punto equidistante de todos los lados del trapecio. De otra forma: el punto O es la representación del centro de la circunferencia inscrita en el trapecio $ABCD$. Esto significa, primero, que M y N son los puntos medios de las bases AD y BC del trapecio y, segundo, que DM y DL son la representación de segmentos iguales en el original y que CN y CL también son segmentos iguales. Pero, entonces, $DM : CN = DL : CL$. Y como $DM : CN = \frac{a}{2} : \frac{b}{2}$, es decir, $DM : CN = a : b$, tendremos que, asimismo, $DL : CL = a : b$. Por analogía, $AK : BK = a : b$.

De modo que para la construcción de las perpendiculares OM, OL, ON y OK a los lados del trapecio no se consumen parámetros. Esto significa, p. ej., que considerando que $\angle SMO$ es la representación de un ángulo que en el original es igual a α, consumimos sólo un parámetro y, a continuación, suponiendo que los ángulos SLO, SNO y SKO también son iguales a α, ya no consumimos parámetros.

Por consiguiente, para representar la pirámide dada se han consumido cinco parámetros.

Ahora calculemos S_t, es decir, el área total de la pirámide. Tenemos: $S_t = S_{lat} + S_{ABCD}$. De la igualdad de los triángulos rectángulos SMO, SLO, SNO y SKO se desprende que $SM = SL = SN = SK$. Entonces, $S_{lat} = \frac{1}{2}(AD + CD + BC + AB)\,SM = \frac{1}{2}(a + b + 2CD)\,SM$. Pero $DL = DM = \frac{a}{2}$ y $CL = CN = \frac{b}{2}$, es decir, $CD = \frac{a+b}{2}$.

Construyamos $CP \parallel MN$. Entonces $CP \perp AD$. Del triángulo rectángulo CDP, donde $CD = \frac{a+b}{2}$ y $DP = \frac{a-b}{2}$, hallamos: $CP = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}$. Pero, $MN = CP$ y $OM = ON$, es decir, $OM = \frac{1}{2}CP$. Por lo tanto, $OM = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$. Del triángulo rectángulo SOM, tenemos: $SM = \frac{OM}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{ab}}{2\cos\alpha}$. Así, pues, $S_{lat} = \frac{1}{2}(a + b + (a+b))\frac{\sqrt{ab}}{2\cos\alpha} = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2\cos\alpha}$. Más adelante, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b)\sqrt{ab}$. De forma que $S_t = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2\cos\alpha} + \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2} = \frac{(a+b)\sqrt{ab}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

EJEMPLO 4. Un triángulo regular cuyo lado es igual a a gira en torno a un eje exterior paralelo a su altura y distanciado de él a $\frac{3}{2}a$. Hallemos el área de la superficie del sólido de revolución obtenido.

SOLUCIÓN. Como el eje de rotación l_0 es paralelo a la altura del triángulo, él es también paralelo al plano de la figura y, por ello, la sección del sólido de revolución prefijado con el plano que pasa por l_0 será la figura Φ_0 constituida por un par de triángulos regulares simétricos con relación a l_0.

Esto quiere decir, que en el ejemplo que consideramos podemos limitarnos a la representación de una figura plana en lugar de representar un sólido de revolución bastante complicado, es decir, es posible construir la representación de la indicada figura Φ_0 (con precisión hasta la semejanza). Además, para resolver el problema incluso podemos limitarnos a la representación del eje l_0 y sólo de uno de los triángulos obtenidos en la sección del sólido de revolución dado en el plano que pasa por l_0 (fig. 145). Así, pues, el $\triangle ABC$ es regular, $AB = a$, AD es la altura del $\triangle ABC$, $l \parallel AD$, $DP \perp l$, $DP = \frac{3a}{2}$ y es preciso hallar el área de la superficie del sólido de revolución. Designemos el área buscada con S_{ABC}.

Designemos también las áreas de las superficies formadas por la rotación de los segmentos AB, AC y BC alrededor del eje l con S_{AB}, S_{AC} y S_{BC} respectivamente. Entonces, $S_{ABC} = S_{AB} + S_{AC} + S_{BC}$.

Tenemos: $S_{AB} = \pi (BP + AQ) AB$. Pero $BP = BD + DP = 2a$, $AQ = DP = \frac{3}{2} a$, $AB = a$. Así, pues, $S_{AB} = \frac{7}{2} \pi a^2$. Por analogía, $S_{AC} = \pi (CP + AQ) AC = \frac{5}{2} \pi a^2$. Más adelante, $S_{BC} = \pi BP^2 - \pi CP^2 = \pi (4a^2 - a^2) = 3\pi a^2$. De modo que $S_{ABC} = 9\pi a^2$.

OBSERVACIÓN. El área buscada se hubiera podido calcular de forma algo más sencilla si hubiéramos hecho uso del primer teorema de Guldin, de acuerdo con el que $S = P 2\pi R$, donde P es el perímetro de la figura que gira alrededor del eje, R, la distancia desde el centroide de dicha figura hasta el eje de rotación. En el ejemplo que hemos considerado $P = 3a$, $R = \frac{3}{2} a$.

EJEMPLO 5. En una pirámide cuadrangular regular el ángulo entre las caras laterales adyacentes es igual a 2α. Hallemos la razón entre el área de la sección diagonal de la pirámide y su área lateral.

SOLUCION. Sea la figura $SABCD$ la representación de la pirámide dada (fig. 146). Ella es completa, su número paramétrico $p = 5$

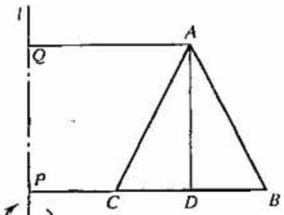


Fig. 145

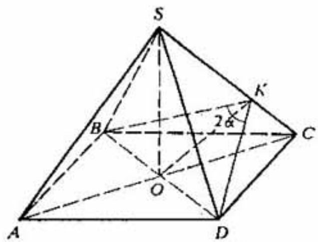


Fig. 146

(cerciórense de esto por su cuenta). Así, pues, el ángulo diedro en la arista SC, es decir, $\angle SC = 2\alpha$. Hay que hallar la razón $S_{\Delta SAC} : S_{\text{lat}}$.

Con el fin de realizar los cálculos necesarios construyamos, primero, la representación del ángulo lineal, p. ej., en la arista lateral SC. Para ello, es preciso bajar una perpendicular del punto D a la arista SC.

Sea DK la representación de la perpendicular a la arista SC. De este modo, en la representación se ha consumido un parámetro más y, ahora, tropezamos con la llamada representación definida con exceso (pero cierta). A constinuación, construyamos BK y OK. Entonces, $\angle BKD$ será el ángulo lineal del diedro SC y, por consiguiente, $\angle BKD = 2\alpha$. Es fácil demostrar que $BK = DK$ y, por ello, OK, que es la mediana del triángulo BDK, será asimismo su bisectriz y altura. Así, pues, $\angle DKO = \alpha$.

Ahora, señalemos que $S_{\triangle SAC} = 2S_{\triangle SOC} = OK \cdot SC$ y $S_{lat} = 4S_{\triangle SCD} = 2DK \cdot SC$. De esta manera, $\frac{S_{\triangle SAC}}{S_{lat}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{OK}{DK}$. Pero del triángulo rectángulo ODK tenemos: $\frac{OK}{DK} = \cos\alpha$ y, entonces, obtenemos: $\frac{S_{\triangle SAC}}{S_{lat}} = \frac{\cos\alpha}{2}$.

EJEMPLO 6. **En una pirámide cuadrangular regular el plano secante, trazado por un lado de la base, divide por la mitad la superficie lateral y el ángulo diedro en la arista de la base. Hallemos el ángulo entre la cara lateral y el plano de la base.**

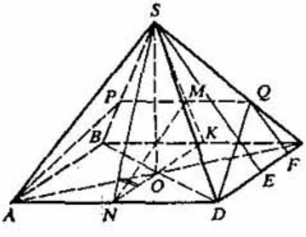


Fig. 147

SOLUCIÓN. Sea la figura $SABCD$ (fig. 147) la representación de la pirámide dada. Ella es completa. Su número paramétrico $p = 4$ (calcúlenlo por su cuenta). En la pirámide se da una sección que satisface las condiciones métricas. Calculemos cómo se consumen los parámetros al representar dicha sección. Ante todo, señalemos que como la sección pasa por una arista de la base (sea por la arista AD), debido a que $AD \parallel BC$, AD será también paralela al plano SBC. Entonces, el plano secante corta la cara SBC por PQ ($PQ \parallel AD$). A continuación, realicemos algunas construcciones más, tales como: construyamos M que es el punto medio del segmento PQ, tracemos la recta SM y marquemos el punto M de intersección de las rectas SM y BC. Es evidente que $BK = CK$. Construyamos, además, la recta KO y el punto N de intersección de las rectas OK y AD. Como $OK \parallel AB$, N es el punto medio de la arista AD. Ahora, construimos SN y NM. Como N es el punto medio de la arista AD, $ON \perp AD$. Pero ON es la proyección del segmento SN en el plano ABC. Por consiguiente, $SN \perp AD$. Pero, entonces, $\angle SNK$ es el ángulo lineal de aquel ángulo diedro en la arista AD, una de cuyas aristas pasa por el punto S y la otra, por K. Designemos este ángulo diedro de la siguiente forma: $\angle SADK$. Así, pues, $\angle SNK$ es el ángulo lineal del diedro $SADK$. Considerando NM la representación de la bisectriz del ángulo SNK, suponemos simultáneamente que el plano

$APQD$ divide por la mitad el ángulo $SADK$, lo que corresponde al planteamiento del problema. Tomando NM como la representación de la bisectriz de $\angle SNK$, para la representación consumimos un parámetro más. Esto significa que ahora ya hemos consumido los cinco parámetros. Además, todavía no hemos tenido en cuenta que el plano secante divide por la mitad la superficie lateral de la pirámide. Como veremos más adelante, la suposición de que el plano bisectriz $APQD$ es la representación del plano que divide por la mitad el área de la superficie lateral de la pirámide, conduce a la suposición de que $AD : SM = \sqrt{2} : 1$. Esto significa que en la representación se consume un parámetro más (el sexto). Claro está que la revelación de este hecho podría no haberse aplazado, sino realizarlo de inmediato al construir la representación. Sin embargo, por razonamientos metodológicos sólo lo haremos en el proceso de la resolución y vamos a resolver este ejemplo lo mismo que el anterior, en una representación definida con exceso. Pero, a diferencia del anterior ejemplo, aquí la representación puede ser tomada al principio «algo incierta», lo que no se refleja en los posteriores cálculos y, después de descubrir la dependencia $AD : SN = \sqrt{2} : 1$, dicha representación puede ser ya realizada de tal forma que para ella se consumirán exactamente cinco parámetros.)

Así, pues, vamos a resolver un ejemplo en una representación para la que $p = 6$. Al pasar a los cálculos necesarios señalemos que como la pirámide es regular, los ángulos diedros en las aristas son iguales. Por esta razón, es indiferente cuál de estos ángulos hallamos. Es evidente, que es conveniente buscar el ángulo diedro en la arista AD, ya que por ésta pasa el plano secante. Ya hemos demostrado que $\angle SNK$ es el ángulo lineal del diedro $SADK$ buscado. Hagamos $\angle SNK = x$. En la arista AD se han formado dos ángulos diedros más: las aristas de uno de ellos pasan por los puntos S y M, del otro, por K y M. El primero de ellos es $\angle SADM$, el segundo, $\angle MADK$. El ángulo lineal del primero es $\angle SNM$ y del segundo, $\angle MNK$.

Como el plano secante divide por la mitad $\angle SADK$, $\angle SADM = \angle MADK$ y, entonces, asimismo, $\angle SNM = \angle MNK$, con la particularidad de que cada uno de estos ángulos es igual a $\frac{x}{2}$.

Ahora, introduzcamos un parámetro auxiliar, haciendo el lado de la base igual a a. Del planteamiento se desprende que

$$S_{\triangle SAD} + 2S_{\triangle SQD} + 2S_{\triangle SPQ} = 2S_{\triangle DQC} + S_{BPQC}. \qquad (1)$$

Calculemos todas las áreas que entran en la igualdad (1). Para abreviar, hagamos la longitud de la apotema de la cara lateral igual a l.

1) $S_{\triangle SAD} = \frac{1}{2} al.$

2) Del $\triangle SON$ rectángulo tenemos: $\cos x=\frac{a}{2l}$. Más adelante,

$$\begin{cases} SM+MK=l, \\ \frac{SM}{MK}=\frac{SN}{NK}=\frac{l}{a}, \end{cases} \quad \text{de donde } MK=\frac{al}{a+l} \text{ y } SM=\frac{l^2}{a+l}.$$

Del $\triangle MNK$ (según el teorema de los senos) tenemos: $\frac{MK}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}=$

$=\frac{NK}{\operatorname{sen}\left(180^\circ-\left(x+\frac{x}{2}\right)\right)}$, de donde

$$\frac{l}{a+l}\operatorname{sen}\frac{3x}{2}=\operatorname{sen}\frac{x}{2}. \tag{2}$$

3) Construyamos QF, que es la altura del $\triangle DQC$. Entonces, $S_{\triangle DQC}=\frac{1}{2}aQF$. Construyamos SE, que es la apotema de la cara SDC. Hallemos QF de la proporción $\frac{QF}{SE}=\frac{QC}{SC}$. Pero $\frac{QC}{SC}=\frac{MK}{SK}$, es decir, $\frac{QF}{SE}=\frac{MK}{SK}$, de donde $QF=MK=\frac{al}{a+l}$.

Así, pues, $S_{\triangle DQC}=\frac{a^2l}{2(a+l)}$.

4) $S_{\triangle SQD}=S_{\triangle SCD}-S_{\triangle DQC}=\frac{1}{2}al-\frac{a^2l}{2(a+l)}=\frac{al^2}{2(a+l)}$.

5) $S_{\triangle SPQ}=\frac{1}{2}SM\cdot PQ$. Pero $\frac{PQ}{BC}=\frac{SM}{SK}$, de donde $PQ=$ $=\frac{al}{a+l}$.

De aquí, $S_{\triangle SPQ}=\frac{al^3}{2(a+l)^2}$.

6) $S_{BPQC}=S_{\triangle SBC}-S_{\triangle SPQ}=\frac{1}{2}al-\frac{al^3}{2(a+l)^2}=\frac{a^2l(a+2l)}{2(a+l)^2}$.

7) Poniendo en (1) los valores hallados de las áreas, calculamos que

$$a=l\sqrt{2}. \tag{3}$$

(De aquí se deduce la dependencia $AD:SN=\sqrt{2}:1$, de la que hablamos al calcular el número paramétrico de la representación.) Expresando el valor de a de la ecuación (2), obtenemos $a=$ $=\frac{l\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}-l$. Poniendo este valor de a en la igualdad (3), llegamos a la ecuación $\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{3x}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}-1=\sqrt{2}$, de donde obtenemos: $\operatorname{sen}\dfrac{3x}{2}-\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}=\sqrt{2}\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$ o bien $2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cos x=\sqrt{2}\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$.

Como $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\neq 0$, de la última ecuación $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, de donde $x=45°$.

PROBLEMAS PARA EL TRABAJO INDIVIDUAL

763. En un prisma cuadrangular regular la diagonal es igual a d y está inclinada respecto al plano de la cara lateral bajo un ángulo igual a α. Hallen el área lateral del prisma.

764. Los ángulos formados por la diagonal de la base de un paralelepípedo rectangular con el lado de la base y con la diagonal del paralelepípedo son iguales a α y β, respectivamente. Hallen el área lateral del paralelepípedo si su diagonal es igual a d.

765. La altura de un prisma cuadrangular regular es igual a H y el ángulo entre las diagonales trazadas desde uno de los vértices de la base a dos caras laterales adyacentes es igual a α. Hallen el área lateral del prisma.

766. La altura de un prisma triangular regular es igual a H. La recta que pasa por el centroide de la base superior y el punto medio del lado de la base inferior forma con el plano de la base el ángulo α. Hallen el área total del prisma.

767. El área total de una pirámide cuadrangular regular es igual a S. El ángulo diedro en la arista de la base es igual a α. Hallen el lado de la base.

768. Hallen el área total de una pirámide cuadrangular regular si su altura es igual a H y el área de la cara lateral es igual a la de la base.

769. La base de una pirámide es un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales a 6 y 8 cm, respectivamente. El ángulo de inclinación de cada una de las caras laterales de la pirámide hacia el plano de la base es igual a 60°. Hallen el área lateral de la figura.

770. El área lateral de una pirámide cuadrangular regular es igual a S y el ángulo diedro en la arista de la base es igual a α. Hallen la distancia entre el centroide de la base y la cara lateral de la pirámide.

771. El área total de una pirámide triangular regular es igual a S, el ángulo plano en el vértice de la pirámide es igual a α. Hallen el radio de la circunferencia circunscrita a la base.

772. La base de una pirámide es un cuadrado con lado igual a a. Dos caras laterales son perpendiculares al plano de la base y cada una de las otras dos, forman con ella un ángulo igual a α. Hallen el área total de la pirámide

773. La base de una pirámide es un triángulo. Dos caras laterales adyacentes son perpendiculares al plano de la base y las otras dos forman con él ángulos que son iguales a α y β, respectivamente. La altura de la pirámide es H. Hallen el área lateral de la pirámide.

774. La base de una pirámide es un triángulo, entre cuyos lados la razón es 13 : 14 : 15 y cada uno de los ángulos diedros en las aristas de la base es igual a 45°. Hallen la razón entre el área total de la pirámide y el área de sus bases.

775. La base de un prisma recto es un triángulo isósceles en que el ángulo entre los lados iguales equivale a 2α. De los vértices de la base superior se trazan dos diagonales de las caras laterales iguales. El ángulo entre las diagonales es igual a 2β. Hallen la razón entre el área lateral del prisma y el área de sus bases.

776. El centroide de una de las caras de un cubo es unido con los vértices de la cara opuesta. Hallen la razón entre el área total de la pirámide que se forma y el área total del cubo.

777. Por el lado de la base inferior de un prisma triangular regular y por el punto medio de la arista lateral, que no se interseca con este lado, se ha trazado un plano que con el de la base forma un ángulo igual a α. Hallen la razón entre el área lateral de la pirámide que con ello se forma y el área lateral del prisma dado.

778. El ángulo entre las generatrices en la sección axial de un cono es igual a 2α. Hallen la razón entre el área lateral del cono y el área de su sección axial.

779. El ángulo máximo entre las generatrices de un cono es igual a 120°. Demuestren que el área lateral del semejante cono es igual al área lateral de un cilindro que tenga la base y la altura iguales que el cono.

780. El área lateral de un cono es un cuarto de un círculo enrollado en forma de una superficie cónica. Hallen la razón entre el área total de la superficie del cono y el área de su sección axial.

781. El área lateral de un cono truncado es igual a la suma de las áreas de las bases, en tanto que la razón entre los radios de las bases es 1 : 3. Hallen el ángulo de inclinación de la generatriz hacia el plano de las bases.

782. Un triángulo regular cuyo lado es igual a a, gira en torno a un eje paralelo al lado del triángulo y pasa por el vértice opuesto a dicho lado. Hallen el área del sólido de revolución hallado.

783. Un triángulo rectángulo, cuyos catetos son iguales a 5 y 12 cm, gira alrededor de un eje exterior paralelo al cateto mayor y alejado de él a una distancia de 3 cm. Hallen el área del sólido de revolución obtenido.

784. Un rectángulo, cuyos lados son iguales a a y b, gira en torno a un eje perpendicular a su diagonal y que pasa por uno de sus extremos. Hallen el área del sólido de revolución obtenido.

785. Un triángulo isósceles con la base igual a a y ángulo en la base igual a α, gira en torno a un eje que pasa por uno de los extremos de la base perpendicular a ella. Hallen el área del sólido de revolución obtenido.

786. En el trapecio rectangular, circunscrito a la circunferencia de radio R, el ángulo agudo es igual a α. Hallen el área del sólido obtenido al girar el mencionado trapecio alrededor del menor de sus lados paralelos.

787. Un rombo con ángulo agudo α gira alrededor de su lado. Hallen la razón entre el área del sólido de revolución obtenido y la del rombo.

788. Una recta corta de los lados de un triángulo rectángulo, entre los que el ángulo es igual a 60°, segmentos cuyas longitudes constituyen 0,25 de la largura de la hipotenusa. Hallen la razón entre el área del triángulo dado y la del sólido obtenido al girar dicho triángulo en torno a la mencionada recta.

789. Un trapecio isósceles con ángulo en la base de 60° gira en torno a la bisectriz de dicho ángulo. Hallen la razón entre el área del sólido de revolución y la del trapecio si la altura de éste es $\sqrt{3}$ menor que la semisuma de sus bases.

790. Un plano secante, paralelo a la base de una pirámide triangular regular, divide por la mitad su superficie lateral. Hallen en qué razón se divide por este corte la altura.

791. El plano secante perpendicular a la cara SBC trazado por el lado AD de la base de la pirámide cuadrangular regular $SABCD$, divide dicha cara en dos figuras de áreas iguales. Hallen el área total de la pirámide si $AD = a$.

792. En una pirámide cuadrangular regular el plano trazado por un lado de la base, divide por la mitad la superficie lateral y el ángulo diedro en la arista de la base. Hallen el ángulo diedro lateral de la pirámide.

793. Un plano secante pasa por la arista de la base de una pirámide cuadrangular regular y corta en la cara opuesta un triángulo, cuya área es igual a

S_1. Hallen el área lateral de la pirámide que está separada de la pirámide dada por el plano secante, si el área lateral de ésta es igual a S_2.

794. La base de una pirámide es un rombo, cuyo lado es igual a a y el ángulo agudo entre sus lados es α. Cada uno de los ángulos diedros en las aristas de la base es igual a φ. Hallen el área lateral de la pirámide.

795. La base de una pirámide es un trapecio isósceles, cuya diagonal es igual a d y el ángulo entre dicha diagonal y la base mayor del trapecio es igual a α. Cada una de las caras laterales de la pirámide está inclinada hacia el plano de la base bajo un ángulo φ. Hallen el área total de la pirámide.

796. La longitud de cada uno de los lados de un prisma triangular es igua a a. La proyección de uno de los vértices de la base superior es el centroide de la base inferior. Las aristas laterales están inclinadas al plano de la base bajo ángulos iguales, cada uno de ellos, a α. Hallen el área lateral del prisma.

797. La base de un paralelepípedo, cuya arista lateral es igual a b, es un cuadrado con lado a. Uno de los vértices de la base superior es equidistante a todos los vértices de la base inferior. Hallen el área total del paralelepípedo.

798. La base de un prisma es un triángulo regular, cuyo lado es igual a a. Cada arista lateral de la figura es igual a b, el ángulo entre una de las aristas laterales y los lados de la base adyacentes a ella, es igual a 45°. Hallen el área lateral del prisma

799. ¿Cuántas veces es mayor la distancia desde el punto luminoso hasta el centro de una esfera que el radio de ésta si el área de la parte iluminada de la esfera es 2 veces menor que la que está en sombra?

§ 14. VOLÚMENES

EJEMPLO 1. La base de un paralelepípedo recto es un paralelogramo, cuyos lados son iguales a a y b, en tanto que el ángulo obtuso es igual a φ. Hallemos el volumen del paralelepípedo si su diagonal menor es igual a la diagonal mayor de la base.

SOLUCIÓN. Sea la figura $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 148), la representación del paralelepípedo dado. Ella es completa. Su número paramétrico $p = 5$.

En efecto, considerando que AA_1 es la representación del segmento perpendicular al plano de la base, consumimos dos parámetros. Suponiendo que $AD : CD = a : b$, consumimos un parámetro. Si consideramos que, p. ej., $\angle ABC$ es la representación del ángulo que en el original es igual a φ, consumimos un parámetro más. Con ello, ya que consideramos que $\angle ABC$ es la representación de un ángulo obtuso, debemos suponer que los segmentos BD y AC son las representaciones de las diagonales menor y mayor del paralelogramo $ABCD$. Por esta razón, consideremos que $B_1D : AC = 1 : 1$. Así, pues, consumimos un parámetro más.

Hallemos ahora V, el volumen del paralelepípedo. Del $\triangle ACD$ tenemos: $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \varphi$. Pero $AC = B_1D$. De este modo, $B_1D^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$. Del $\triangle ABD$ obtenemos: $BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (180° - \varphi) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi$.

Del triángulo rectángulo BB_1D tenemos: $BB_1^2 = B_1D^2 - BD^2$, es decir, $BB_1^2 = (a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi) - (a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi) = -4ab \cos \varphi$ y, por lo tanto, $BB_1 = 2\sqrt{-ab \cos \varphi}$.

Como $S_{ABCD} = ab \operatorname{sen} \varphi$, obtenemos: $V = 2ab \operatorname{sen} \varphi \sqrt{-ab \cos \varphi}$.

De acuerdo con el sentido del problema φ es un ángulo obtuso. Por ello, $-1 < \cos \varphi < 0$ y, entonces, $(-\cos \varphi)$ es un número positivo. Como $\operatorname{sen} \varphi > 0$, el valor hallado de V es positivo.

Por esto, $V = 2ab \operatorname{sen} \varphi \sqrt{-ab \cos \varphi}$.

EJEMPLO 2. Las caras laterales de una pirámide triangular son perpendiculares a pares y sus áreas son iguales a Q_1, Q_2 y Q_3. Hallemos el volumen de la pirámide.

SOLUCIÓN. Sea el cuadrilátero $SABC$ con sus diagonales la representación de la pirámide dada (fig. 149). Ella es completa. Calcule-

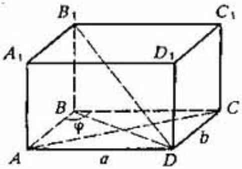


Fig. 148

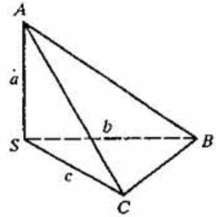


Fig. 149

mos su número paramétrico p. Como las caras laterales de la pirámide prefijada son perpendiculares a pares, asimismo, sus aristas laterales son también perpendiculares a pares entre sí. Considerando SA la representación de la arista de la pirámide perpendicular a sus aristas SB y SC, consumimos un parámetro. Considerando SB la representación de la arista perpendicular a la arista SC, consumimos un parámetro más. De este modo, habiendo consumido tres parámetros, hemos asegurado la perpendicularidad mutua de las caras laterales de la pirámide. Suponiendo, a continuación, que los $\triangle SAB$ y $\triangle SBC$ son las representaciones de las caras laterales, entre cuyas áreas la razón es igual a $Q_1 : Q_2$, es decir, suponiendo que $\left(\frac{1}{2} SA \cdot SB\right) : \left(\frac{1}{2} SB \cdot SC\right) = Q_1 : Q_2$ o bien $SA : SC = Q_1 : Q_2$, consumimos un parámetro. Por analogía, considerando que $\triangle SBC$ y $\triangle SAC$ son las representaciones de las caras laterales en las que la razón entre las áreas es igual a $Q_2 : Q_3$, también consumimos un parámetro. Así, pues, para la representación construida $p = 5$.

Ahora, calculamos V, o sea, el volumen de la pirámide. Señalemos que si por tradición consideramos el $\triangle ABC$ como la base de la pirámide, primero debíamos haber calculado $S_{\triangle ABC}$ y la altura de la pirámide trazada del vértice S al plano ABC. Sin embargo, en el ejercicio que estudiamos es posible realizar los cálculos necesarios de forma más sencilla si se nos ocurre «poner» la pirámide sobre cualquiera de sus caras laterales. Así, pues, al advertir que la arista SA es perpendicular a la cara SBC, podemos tomar como base de la pirámide el $\triangle SBC$. Entonces, $V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC$. Haciendo, para abreviar, $SA = a$, $SB = b$ y $SC = c$, tenemos: $V = \frac{1}{6} abc$.

De los triángulos rectángulos SAB, SBC y SAC obtenemos: $ab = 2Q_1$, $bc = 2Q_2$, $ac = 2Q_3$. Multiplicando, término por término, estas tres igualdades, hallamos $(abc)^2 = 8Q_1Q_2Q_3$, de donde $abc = 2\sqrt{2Q_1Q_2Q_3}$.

Así, pues, $V = \frac{1}{3}\sqrt{2Q_1Q_2Q_3}$.

EJEMPLO 3. El área lateral de un cono, en el que el radio de la base es R, es igual a la suma de las áreas de la base y de la sección axial. Hallen el volumen del cono.

SOLUCIÓN. Sea la elipse ω junto con un par de tangentes trazadas a ella desde el punto exterior S la representación del cono dado (fig. 150). Ella es completa. Al considerar la elipse ω como la representación de una circunferencia, consumimos dos parámetros. Considerando el segmento SO como la representación de la altura del cono, consumimos dos parámetros. Construyamos la representación del AB que es diámetro de la circunferencia, así como SA y SB, es decir, las representaciones de las generatrices del cono. Para ello, no se consumen parámetros. Por fin, suponiendo que se ha representado un cono tal en el que $S_{\text{lat}} = S_{\text{base}} + S_{\Delta SAB}$, consumimos un parámetro más. (En efecto, de esta igualdad es fácil mostrar que la razón $SO : AO$ está plenamente definida.) De modo que para la representación construida $p = 5$.

Pasemos a determinar V, o sea, el volumen del cono. $V = \frac{1}{3} S_{\text{base}} \cdot SO$, donde $S_{\text{base}} = \pi R^2$. Hacemos para abreviar $SO = x$. Así, pues, para calcular V hay que hallar x.

Como $S_{\text{lat}} = \pi R \cdot SA$, $S_{\text{base}} = \pi R^2$ y $S_{\Delta SAB} = Rx$, componemos la ecuación $\pi R \cdot SA = \pi R^2 + Rx$ o bien $\pi SA = \pi R + x$. Pero, del triángulo rectángulo SAO, tenemos: $SA = \sqrt{x^2 + R^2}$.

De modo que obtenemos: $\pi\sqrt{x^2 + R^2} = \pi R + x$.

Elevando al cuadrado ambos miembros de esa ecuación, después de las simplificaciones necesarias, obtenemos $(\pi^2 - 1)x^2 - 2\pi Rx = 0$, de donde $x_1 = \frac{2\pi R}{\pi^2 - 1}$, $x_2 = 0$.

Está claro que la segunda solución no satisface el planteamiento. Por consiguiente, $V = \frac{2\pi^2 R^3}{3(\pi^2 - 1)}$.

EJEMPLO 4. Un rectángulo con lados a y b gira en torno a un eje que pasa por su vértice y que es paralelo a la diagonal que no pasa por dicho vértice. Hallemos el volumen del sólido de revolución obtenido.

SOLUCIÓN. Como en el ejemplo 4 del § 13, limitémonos a la representación no del sólido de revolución, sino sólo de la figura que se obtiene en la sección de dicho sólido con el semiplano, cuyo límite es el eje de rotación. Semejante sección, que es un rectángulo $ABCD$ con la diagonal BD, con la recta l paralela a la diagonal BD y que pasa por el punto A, es la representación de dicha sección (fig. 151)

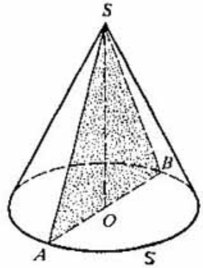


Fig. 150

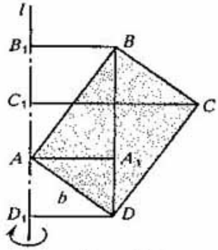


Fig. 151

(En tal caso la representación se efectúa con una precisión hasta la semejanza, es decir, aquí no hay ni qué hablar del consumo de parámetros.)

Así, pues, $AB = a$, $AD = b$. Calculemos V_{ABCD}, es decir, el volumen del sólido de revolución. Bajemos de los puntos B, C y D las perpendiculares BB_1, CC_1 y DD_1 a la recta l y desde el punto A, la perpendicular AA_1 a la recta BD.

Entonces, $V_{ABCD}=(V_1+V_2)-(V_3+V_4)$, donde $V_1=V_{C_1B_1BC}=$ $=\frac{1}{3}\pi B_1C_1(CC_1^2+CC_1\cdot BB_1+BB_1^2)$. Es fácil cerciorarse de que $CC_1=2BB_1$ y, entonces, $V_1=\frac{1}{3}\pi B_1C_1\cdot 7BB_1^2$. A continuación, $V_2=$ $=V_{D_1C_1CD}=\frac{1}{3}\pi C_1D_1\ (CC_1^2+CC_1\cdot DD_1+DD_1^2)$, $V_3=V_{AB_1B}=$ $=\frac{1}{3}\pi AB_1\cdot BB_1^2$, $V_4=V_{AD_1D}=\frac{1}{3}\pi AD_1\cdot DD_1^2$.

Pero como $l \parallel BD$, $BB_1=DD_1=AA_1$. Del $\triangle ABD$ rectángulo hallamos que $BD=\sqrt{a^2+b^2}$ y $AA_1=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Más adelante, hallamos que $CC_1=2AA_1=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Entonces,

$$V_1+V_2=\frac{1}{3}\pi\,(CC_1^2+CC_1\cdot AA_1+AA_1^2)(B_1C_1+C_1D_1)=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{3}\pi\frac{7a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Por analogía, $V_3+V_4=\frac{1}{3}\pi AA_1^2(AB+AD)=\frac{1}{3}\pi\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Así, pues, $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\pi\frac{6a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2\pi a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

OBSERVACIÓN. El volumen buscado del sólido de revolución se hubiera podido calcular haciendo uso del segundo teorema de Guldin, de acuerdo con el cual $V=S\cdot 2\pi R$, donde S es el área de la figura que gira en torno al eje y R, la distancia desde el centroide de esa figura hasta el eje de rotación. Es fácil hallar que en el ejemplo que hemos considerado $S=ab$, $R=AA_1=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

EJEMPLO 5. El lado de la base de una pirámide triangular regular es igual a a, la altura bajada desde el vértice de la base hasta la cara lateral opuesta es igual a b. Hallen el volumen de la pirámide.

SOLUCIÓN. Sea el cualdrilátero $SABC$ con sus diagonales la representación de la pirámide dada (fig. 152). Ella es completa. Considerando que $\triangle ABC$ es la representación de un triángulo regular, consumimos dos parámetros; suponiendo que SO es la representación de la altura de la pirámide, también consumimos dos parámetros. Construyamos SD, que es una mediana del $\triangle SBC$ y la representación de la apotema de la cara lateral de la pirámide. Sea AK la representación de la perpendicular bajada del vértice A de la pirámide dada a la apotema de la cara lateral opuesta. Como es fácil mostrar, el segmento AK será también, en tal caso, la representación de la altura bajada desde el vértice de la base hasta la cara lateral. Esta condición métrica impuesta a la representación provoca el consumo de un parámetro más. De este modo, hemos consumido en la representación los cinco parámetros. Pero, no se ha tenido en cuenta una condición de acuerdo con la que en el original $A_0B_0=a$ y $A_0K_0=b$. La circunstancia de que estos datos son literales nos ofrece cierta libertad; vamos a considerar que en la representación construida $AB:AK=a:b$. Así, pues, imponemos a la representación una condición métrica más y, por lo tanto, consumimos otro parámetro. Pero en semejante caso, la representación será métricamente definida con exceso. A pesar de todo, al realizarse cierta dependencia entre a y b (más abajo ella será obtenida) la representación construida es cierta.

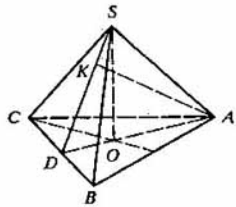


Fig. 152

Mostremos que habiendo tomado al azar en la apotema SD el punto K, no se puede considerar que AK es la representación del segmento A_0K_0 que en el original es perpendicular al segmento S_0D_0.

Como según el sentido del problema la altura A_0K_0 existe, del $\triangle S_0A_0D_0$, donde $A_0K_0=b$ y $A_0D_0=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, es posible calcular que $D_0K_0 : S_0K_0 = =\frac{3a^2-4b^2}{4b^2-2a^2}$. Eligiendo diversos valores (tolerables) de a y b o distintos valores de la razón $a : b$, obtendremos diferentes valores de la razón $D_0K_0 : S_0K_0$, es decir, distintas posiciones del punto K_0.P. ej., prefijando $\begin{cases} a=10, \\ b=8, \end{cases}$ obtendríamos que $\frac{3a^2-4b^2}{4b^2-2a^2}=\frac{11}{14}$. Como vemos, prefijando de modo tan concreto los valores de a y b la posición del punto K_0 se determina con plenitud, ya que $D_0K_0 : S_0K_0 = 11 : 14$. Esto quiere decir, que ya no podemos elegir al azar el punto K_0.

Así, pues, sea $SABC$ la pirámide regular dada, en la que $AB = = a$, $AK = b$. Hallemos V, es decir, el volumen de la figura.

Como $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot SO$, donde $S_{\triangle ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, para determinar el volumen es suficiente hallar la altura SO. De la semejanza de los triángulos rectángulos SOD y ADK, obtenemos: $\frac{SO}{AK}= =\frac{OD}{DK}$, de donde $SO=\frac{AK\cdot OD}{DK}$, donde $AK=b$, $OD=\frac{1}{3}AD= =\frac{a\sqrt{3}}{6}$, $DK=\sqrt{AD^2-AK^2}=\frac{\sqrt{3a^2-4b^2}}{2}$.

De esta manera, $SO=\frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2-4b^2}}$. Entonces, $V=\frac{a^3b}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}$. Según el sentido del problema AK es la altura bajada a la cara SBC (¡precisamente a ella y no al plano de la cara!). Es evidente, que si la pirámide dada es tan «bajita» que $\angle ASD = 90°$, los puntos K y S coinciden, lo que significa que los segmentos AK y SA coinciden también. Si, por lo contrario, la pirámide es aún más «baja», la altura bajada a la cara SBC ya no existirá por completo.

Haciendo $\angle ASD=90°$, de $\triangle ASD$ rectángulo, donde $OD= \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $AO=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, hallamos: $SO=\sqrt{\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Así, pues, para la existencia de la altura AK es necesario que los valores de a y b satisfagan la desigualdad $\frac{ab\sqrt{3}}{3\sqrt{3a^2-4b^2}}\geqslant\frac{a\sqrt{6}}{6}$ o bien el sistema de desigualdades equivalente a la anterior desigualdad: $\frac{a\sqrt{2}}{2}\leqslant b\leqslant\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Al mismo tiempo, es evidente que de acuerdo con el sentido del problema $AK<AD$, ya que AK es perpendicular a la cara SBC y AD, oblicua a ella. Entonces, $b<\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Esta dependencia entre a y b ya fue advertida más arriba. De tal manera, si $\frac{a\sqrt{2}}{2} \leqslant \leqslant b < \frac{a\sqrt{3}}{2}$, la pirámide que satisface las condiciones del problema existe.

Así, pues, $V = \frac{a^3 b}{12\sqrt{3a^2 - 4b^2}}$, donde $\frac{a\sqrt{2}}{2} \leqslant b < \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

EJEMPLO 6. Demostremos que el volumen de un sólido obtenido durante la rotación de un segmento circular cerrado con la cuerda, cuya longitud es igual a a, en torno al diámetro de este círculo paralelo a la cuerda, no depende del radio del círculo.

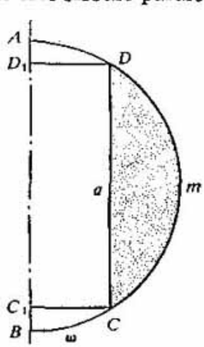


Fig. 153

SOLUCIÓN. Limitémonos a la representación no del sólido de revolución, sino sólo de la figura que se obtiene en la sección del sólido con un semiplano, cuyo límite es el eje de rotación.

Sea el segmento CmD del círculo ω la representación de dicha sección, mientras que el diámetro AB del círculo, la representación del eje de rotación (fig. 153). Toda la representación es una figura plana, por lo que acerca de la plenitud de la representación y el cálculo de los parámetros aquí no se puede ni hablar: la representación ha de ser realizada con una precisión hasta la semejanza.

Así, pues, sea la cuerda CD igual a a y paralela al eje de rotación AB. Demostremos que V, que es el volumen del sólido de revolución del segmento CmD en torno al eje AB, no depende de OA. Para la demostración construyamos: $CC_1 \perp AB$ y $DD_1 \perp AB$. Entonces, $V = V_1 - V_2 - 2V_3$, donde V_1 es el volumen de la esfera, cuyo radio es igual a OA; V_2, el volumen del cilindro, cuya base es la circunferencia de radio DD_1 y cuya altura es igual a C_1D_1; V_3, el volumen del segmento esférico, cuya base es la circunferencia de radio DD_1 y la altura es igual a $OA - OD_1$.

Para abreviar, hagamos $OA = R$. Entonces, $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_2 =$

$$= \pi DD_1^2 C_1D_1 = \pi\left(\frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2}\right)^2 a, \qquad V_3 = \pi AD_1^2\left(OA - \frac{1}{3}AD_1\right) =$$

$$= \pi\left(R - \frac{a}{2}\right)^2\left(R - \frac{1}{3}\left(R - \frac{a}{2}\right)\right) = \pi\left(R - \frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{2}{3}R + \frac{a}{6}\right).$$

De este modo, $V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4\pi R^2 a - \pi a^3}{4} - \frac{2\pi}{3}\left(R^2 - aR + \frac{a^2}{4}\right) \times$

$\times\left(2R+\frac{a}{2}\right)$. Después de las correspondientes simplificaciones, obtenemos: $V=\frac{\pi a^3}{6}$.

Como la expresión $\frac{\pi a^3}{6}$ no contiene R, hemos demostrado lo que era necesario.

EJEMPLO 7. Una pirámide triangular se corta con un plano en dos poliedros. Hallemos la razón entre los volúmenes de estos poliedros si sabemos que el plano secante divide las aristas que convergen en un vértice de la pirámide en las razones $1:2$, $1:2$, $2:1$, contando desde el mencionado vértice.

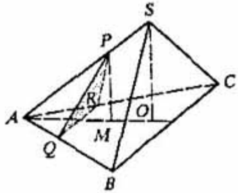


Fig. 154

SOLUCIÓN. Sea el cuadrilátero $SABC$ con sus diagonales la representación de la pirámide dada (fig. 154), el $\triangle PQR$, la representación de la sección dada. Ésta es completa y para construirla no se ha consumido ni un parámetro.

Supongamos que V es el volumen de la pirámide $SABC$ y V_1, el de la pirámide $PAQR$, con la particularidad de que $AQ:QB=1:2$, $AR:RC=1:2$ y $AP:PS=2:1$. Hallemos la razón buscada $\frac{V-V_1}{V_1}$.

Tomemos al azar en el plano ABC el punto O y, uniéndolo con el vértice S, vamos a considerar que SO es la representación de la altura de la pirámide $SABC$ (con ellos se consumen dos parámetros). Construyamos AO y $PM \parallel SO$. Entonces el punto M yacerá en la recta AO. Para que la forma de los cálculos sea más sencilla, hagamos $AB=a$, $AC=b$, $AS=c$, $SO=H$, $\angle BAC=\alpha$.

Entonces, $AQ=\frac{1}{3}a$, $AR=\frac{1}{3}b$, $AP=\frac{2}{3}c$ y de la semejanza de los triángulos APM y ASO, tendremos: $PM=\frac{2}{3}H$. Ahora, calculemos V y V_1.

Tenemos: $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}H=\frac{1}{6}abH\operatorname{sen}\alpha$,

$$V_1=\frac{1}{3}S_{\triangle AQR}\frac{2}{3}H=\frac{1}{81}abH\operatorname{sen}\alpha.$$

Entonces, $V=V_1-\frac{25}{162}abH\operatorname{sen}\alpha$. Así, pues,

$$\frac{V-V_1}{V_1}=\frac{\frac{25}{162}abH\operatorname{sen}\alpha}{\frac{1}{81}abH\operatorname{sen}\alpha}=\frac{25}{2}.$$

PROBLEMAS PARA EL TRABAJO INDIVIDUAL

800. La base de un paralelepípedo es el rombo $ABCD$, cuyo lado es igual a a, el ángulo agudo es igual a $60°$. Hallen el volumen del paralelepípedo si la arista lateral es igual a a, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 45°$.

801. Cada una de las aristas de un paralelepípedo es igual a a. Cada uno de los tres ángulos planos en uno de los vértices del paralelepípedo es igual a 2α. Hallen el volumen de la figura.

802. Las aristas de un paralelepípedo, iguales a a y b, son perpendiculares entre sí, en tanto que la arista igual a c forma con cada una de las dos primeras aristas el ángulo α. Hallen el volumen del paralelepípedo.

803. El área de una de las caras laterales de un prisma triangular es igual a m^2. Hallen el volumen del prisma si la distancia de la arista opuesta al plano de la mencionada cara es igual a $2a$.

804. La base de un prisma triangular es un triángulo isósceles en el que los lados iguales son de una longitud a y, entre sí, forman un ángulo α. La diagonal de la cara opuesta a dicho ángulo forma con la otra cara lateral un ángulo igual a φ. Hallen el volumen del prisma.

805. Un prisma cuadrangular regular, en cuya base el lado es igual a a, está truncado de manera que cada una de dos aristas laterales adyacentes es igual a b y cada una de las otras dos aristas es igual a c. Hallen el volumen de este prisma truncado.

806. Un plano secante pasa por el lado de la base de un prisma triangular regular bajo el ángulo α al plano de la base y corta del prisma una pirámide, cuyo volumen es igual a V. Hallen el área de la sección.

807. En una pirámide cuadrangular regular un plano que pasa por el lado de la base y la línea media de la cara lateral opuesta forma con el plano de la base un ángulo de $60°$. Hallen el volumen de la pirámide si el lado de la base es igual a a.

808. La base de una pirámide es un triángulo isósceles con lados laterales iguales a a y con ángulo α en el vértice. Las caras laterales de la pirámide forman con el plano de la base ángulos iguales a $45°$. Hallen el volumen de la pirámide.

809. En una pirámide triangular todas las aristas laterales y dos aristas de base son iguales a a. El ángulo entre los lados iguales de la base es igual a 2α. Hallen el volumen de la pirámide.

810. El área de la seccion diagonal de una pirámide cuadrangular regular es igual a S. La arista lateral forma con el plano de la base el ángulo α. Hallen el volumen de la pirámide.

811. La altura de una pirámide triangular regular es igual a H. El ángulo diedro entre las caras laterales es igual a φ. Hallen el volumen de la pirámide.

812. La arista lateral de una pirámide cuadrangular regular es igual a b. El ángulo diedro entre dos caras laterales adyacentes es igual a φ. Hallen el volumen de la pirámide.

813. Hallen el área de la superficie de una pirámide triangular regular, cuyo volumen es igual a V, el ángulo entre la cara lateral y el plano de la base es igual a α.

814. La base de una pirámide es un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es igual a c y el ángulo agudo es igual a α. Cada arista lateral de la pirámide está inclinada hacia el plano de la base bajo un ángulo β. Hallen el volumen de la pirámide.

815. La perpendicular bajada desde el centroide de la base de una pirámide triangular regular a su arista lateral es igual a l. Hallen el volumen de la pirámide si el ángulo diedro entre la cara lateral y el plano de la base de la figura es igual a α.

816. La perpendicular bajada del centroide de la base de una pirámide triangular regular a la arista lateral es igual a l. Hallen el volumen de la pirámide si el ángulo entre la arista lateral y el plano de la base es igual a β.

817. En una pirámide triangular, en la que cada una de las aristas laterales es igual a b, uno de los ángulos planos en el vértice es recto, mientras que cada uno de los otros dos es igual a 60°. Hallen el volumen de la pirámide.

818. En una pirámide triangular el área de dos caras, perpendiculares entre sí, son iguales a P y Q, en tanto que la longitud de la común entre ellas, igual a b. Hallen el volumen de la pirámide.

819. La altura de una pirámide, cuya base es un cuadrado, se encuentra fuera de la figura y es igual a H. Dos caras laterales opuestas de la pirámide son triángulos isósceles que con el plano de la base forman los ángulos α y β. Hallen el volumen de la pirámide.

820. Un plano secante trazado por el lado AC de la base de la pirámide triangular regular $SABC$ es perpendicular a la arista SB, corta la pirámide $DABC$, cuyo volumen es 1,5 veces menor que el de la pirámide $SABC$. Hallen el área lateral de la pirámide $SABC$ si $AC = a$.

821. La base de la pirámide cuadrangular $SABCD$ es el paralelogramo $ABCD$. Las caras laterales SAB y SBC son perpendiculares al plano de la base. Por los puntos medios de las aristas AD y CD se traza un plano secante paralelo a la arista SB. Hallen la razón entre los volúmenes de los sólidos obtenidos.

822. La base de una pirámide es un rectángulo. Dos de las caras laterales son perpendiculares al plano de la base y las otras dos forman con él los ángulos α y β. Hallen el área de la base de la pirámide si su volumen en igual a V.

823. La base de una pirámide es un trapecio en el que los lados laterales y la base menor es igual a a, en tanto que el ángulo entre el lado lateral y la base es igual a α. Cada una de las aristas laterales está inclinada hacia el plano de la base bajo un ángulo igual a β. Hallen el volumen de la pirámide.

824. La base de una pirámide es un trapecio isósceles, cuyo ángulo agudo es igual a α y su área igual a S. Cada una de las caras laterales de la pirámide forma con el plano de la base un ángulo β. Hallen el volumen de la pirámide.

825. El triángulo ABC, en el que $AC = b$, $AB = c$ y $\angle BAC = \alpha$, gira alrededor de un eje que pasa por el vértice A fuera del triángulo y forma iguales ángulos con los lados AC y AB. Hallen el volumen del sólido de revolución obtenido.

826. Un trapecio isósceles, en el que el ángulo agudo es igual a 45° y los lados laterales son iguales a la base menor, gira en torno al lado lateral. Hallen el volumen del sólido de revolución obtenido si el lado lateral del trapecio es igual a b.

827. Un triángulo rectángulo gira en torno a un eje paralelo a la hipotenusa que pasa por el vértice del ángulo recto. Hallen el volumen del sólido de revolución obtenido si sabemos que el área del triángulo es igual a S, en tanto que la perpendicular bajada del vértice del ángulo recto a la hipotenusa es igual a la mitad de uno de los catetos.

828. Hallen la razón entre los volúmenes de los sólidos obtenidos durante la rotación de un triángulo alrededor de la base y de una recta paralela a ella y que pasa por el vértice del triángulo.

829. Demuestren que los volúmenes de los sólidos obtenidos durante la rotación de un paralelogramo en torno a sus lados adyacentes son inversamente proporcionales a ellos.

830. Un triángulo en el que la razón entre sus lados es igual a $a : b : c$ primero gira alrededor de uno de los lados, a continuación en torno a otro y, por fin, alrededor del tercero. Hallen la razón entre los volúmenes de los sólidos de revolución obtenidos.

831. Durante la rotación de un triángulo rectángulo alrededor de los catetos y en torno a la hipotenusa se forman sólidos de revolución, cuyos volúmenes son iguales a V_1, V_2 y V_3, respectivamente. Demuestren que $\frac{1}{V_3^2} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_1^2}$.

832. Los lados de la base de una pirámide cuadrangular regular truncada son iguales a a y b ($a > b$). El ángulo formado por el plano de la cara lateral con el plano de la base es igual a α. Hallen el volumen de la pirámide.

833. En dos rectas cruzadas se han tomado segmentos, cuyas longitudes son iguales a a y b. Demuestren que el volumen del paralelepípedo, cuyas aristas son los mencionados segmentos, no depende de la disposición de los segmentos en dichas rectas.

834. El radio de la base de un cono es igual a R. Dos generatrices perpendiculares entre sí dividen el área de la superficie lateral del cono en la razón $1 : 2$. Hallen el volumen del cono.

835. En un círculo, cuyo radio es igual a R, se ha cortado un sector con ángulo central α. Éste se ha enrollado en forma de un embudo cónico. Hallen su volumen.

836. La base de una pirámide es un triángulo regular, cuyo lado es igual a a. La perpendicular bajada del punto medio de la arista lateral menor al plano de la cara opuesta es igual a $\frac{a}{4}$. La base de la altura, que se encuentra fuera de la pirámide, es equidistante a dos vértices del triángulo, es decir, de la base, mientras que del tercero se encuentra a una distancia dos veces menor que de los dos primeros. Hallen el volumen de la pirámide.

837. En un cilindro se traza un plano paralelo a su eje, a una distancia a de éste, que en la circunferencia de la base corta un arco α. El área de la sección es igual a S. Hallen el volumen del cilindro.

838. El área de la sección axial de un sector esférico es tres veces menor que la del círculo mayor de una esfera. Hallen la razón entre el volumen del mencionado sector y el de la esfera.

839. En una pirámide cuadrangular regular el área de la sección paralela a la base es tres veces menor que la de la base. Hallen en qué razón se divide el volumen de la pirámide con dicha sección.

840. Está dado el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$. El punto M es el centroide de la cara AA_1B_1B, N, el punto medio de la arista CC_1, el punto K yace en la arista DC y $DK = \frac{1}{4} DC$. El plano trazado por los puntos M, N y K divide el cubo en dos poliedros. Hallen la razón entre sus volúmenes.

841. Está dado el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M es el punto medio de la arista AA_1, N, el punto medio de la arista A_1B_1. El plano trazado por los puntos M, N y C divide el cubo en dos poliedros. Hallen la razón entre sus volúmenes.

842. El plano secante pasa por los puntos P, Q y R que yacen en la continuación de las correspondientes aristas AB, AA_1 y AD del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$, con la particularidad de que $AP : BP = AQ : A_1Q = AR : DR = 5 : 3$. Hallen la razón entre los volúmenes de los cuerpos obtenidos durante el corte del cubo.

843. Está dado el prisma triangular $ABCA_1B_1C_1$. Hallen en qué razón divide el volumen del prisma un plano secante que corta las aristas A_1B_1, B_1C_1 y BC por los puntos M, N y K, respectivamente, si $B_1M : A_1B_1 = 1 : 2$, $B_1N : B_1C_1 = 2 : 3$, $BK : CB = 1 : 3$.

844. Está dado el prisma triangular recto $ABCA_1B_1C_1$ en el que $AC : AA_1 = 3 : 4$. Hallen en qué razón divide el volumen de un prisma un plano trazado por el vértice A y que interseca las aristas laterales BB_1 y CC_1 por los puntos M y N, respectivamente, si $BM = MB_1$ y AN es la bisectriz del ángulo CAC_1.

845. Un plano secante pasa por el punto M, que yace en la continuación de la arista AB del prisma triangular regular $ABCA_1B_1C_1$, por el vértice B_1 y el punto medio de la arista AC. Hallen la razón de los volúmenes de los cuerpos obtenidos si $AM : BM = 2 : 1$.

846. Un plano secante pasa por los puntos M, N y P de las aristas A_1B_1, B_1C_1 y BC, respectivamente, del prisma triangular $ABCA_1B_1C_1$, con la particularidad de que $A_1M = MB_1$, $B_1N : NC_1 = 2 : 1$ y $BP : PC = 1 : 2$. Hallen en qué razón divide el plano secante el volumen del prisma.

847. Un plano secante pasa por los puntos K, L y M en las aristas SA, SB y SC, respectivamente, de una pirámide triangular, con la particularidad de que $SK : KA = SL : LB = 2 : 1$ y la mediana SN de la cara SBC se divide por la mitad con el indicado plano. Hallen en qué razón divide el volumen de la pirámide el plano secante.

848. Un plano secante pasa por el vértice A de la base de la pirámide triangular $SABC$, por D, que es el punto medio de la mediana SK de la cara SAB y el punto E de la mediana SL de la cara SAC que es tal que $SE : EL = 1 : 2$. Hallen en qué razón divide el volumen de la pirámide el plano secante.

849. Está dada la pirámide cuadrangular regular $SABCD$. Hallen en qué razón divide el volumen de la pirámide un plano trazado por los puntos A y B y por el punto medio de la arista SC.

850. Un plano que pasa por una de las aristas de un tetraedro regular divide su volumen en la razón $3 : 5$. Hallen las tangentes de los ángulos en los que dicho plano divide el ángulo diedro del tetraedro.

851. Por cada una de las aristas del tetraedro se ha trazado un plano paralelo a la arista opuesta. Hallen la razón entre los volúmenes del paralelepípedo obtenido y del tetraedro.

852. Está dado el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$. E es el punto medio de la arista DC, F, el punto medio de la arista BB_1. ¿Qué parte del volumen del cubo ocupa el volumen de la pirámide $AFED_1$?

§ 15. COMBINACIÓN DE POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS

Antes de pasar a estudiar los ejemplos, hemos de indicar que al resolver los problemas en los que tratan combinaciones de figuras tridimensionales, debido a la dificultad de realización de los dibujos en ciertos casos es preciso simplificarlos. En unos casos es suficiente tener sólo la representación de la sección de las figuras que participan en la combinación (tal es la mayoría de los problemas sobre la combinación de cuerpos redondos), en otros, sólo la representación de una de las figuras de la combinación; en ocasiones es preciso representar una de las figuras plenamente, en tanto que la otra, sólo parcialmente. Al resolver algunos problemas se considera conveniente hacer uso del diagrama de las proyecciones canónicas de las figuras combinadas.

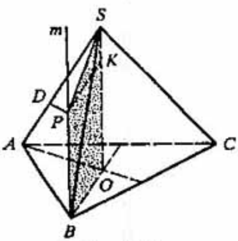


Fig. 155

EJEMPLO 1. La esfera Ω es tangente a la base de una pirámide triangular regular $SABC$ en el punto B y a su arista lateral SA. Hallemos el radio de la esfera si $AB = a$ y $SA = b$.

SOLUCIÓN. Sea el cuadrilátero $SABC$ y sus diagonales (fig. 155) la representación de la pirámide dada. Ella es completa y métricamente definida (cerciórense de esto por su cuenta). La construcción de la representación de la esfera es dificultosa, ya que su radio es desconocido (resulta una especie de «círculo vicioso»: para construir la representación de la esfera hay que conocer su radio, en tanto que para hallar su radio es deseable tener su representación). Intentemos resolver el problema con ayuda de una representación en la que el centro de la esfera esté construido mientras que ella misma, no. Construyamos el centro de la esfera. Ante todo, señalemos que si tuviéramos como representación del centro de la esfera el punto P, la distancia desde P hasta B, en donde la esfera Ω es tangente al plano de la base, será igual al radio de dicha esfera. Así, pues, como vemos, no es obligatorio tener la representación de la propia esfera para calcular su radio. La construcción del punto P será efectuada partiendo de los siguientes razonamientos.

Como la esfera Ω es tangente al plano ABC en el punto B, el punto P yace en la perpendicular al plano ABC levantada en el punto B. En el plano ya está trazada la representación de la altura SO de la pirámide. Por el punto B trazamos la recta $m \parallel SO$. Entonces, como SO es perpendicular al plano ABC, la recta m será asimismo perpendicular al plano ABC. Así, pues, el punto P yace en la recta m y el segmento PB es el radio de la esfera Ω.

Si la esfera es tangente a la arista SA en cierto punto D, está claro que $AB = AD$ (como la longitud de los segmentos tangentes a la esfera trazados desde un mismo punto). Pero $AB = a$, por lo que para la construcción del punto D hay que tomar en el segmento SA, a partir del punto A, tal segmento AD que $AD = a$. Haciendo uso de que las longitudes de las aristas AB y SA están prefijadas en forma general, tomemos al azar el punto D en la recta SA y consideremos que $AD = AB$. (Si estipulamos a a y b valores numéricos concretos, el punto D no puede tomarse al azar. P. ej., si $a = 15$, $b = 20$, $AD:SA = 15:20$ bien $AD:SA - 3:4$ de donde queda clara la construcción del punto D.)

Seguidamente, construyamos el segmento PD. Como la arista SA es tangente a la esfera Ω, $PD \perp SA$ y PD es el radio de la esfera Ω, es decir, $PD = PB$. Con el fin de calcular la longitud del segmento PD hemos de realizar las siguientes construcciones adicionales:

1) Unir los puntos S y P.
2) Trazar OB, la mediana del $\triangle ABC$.
3) Trazar $PK \parallel OB$.

Hagamos $PB = x$ y compongamos una ecuación.

Como $SA = b$ y $AD = a$, $SD = b - a$. Del $\triangle SDP$ rectángulo: tenemos: $SP^2 = (b-a)^2 + x^2$. Del $\triangle SBO$ rectángulo, tenemos, $BO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ y $SO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$.

Como $m \parallel SO$ y $PK \parallel OB$, $OB = PK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ y $PB = KO = x$.

Entonces, $SK = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} - x$.

Ahora, del $\triangle SPK$ rectángulo obtenemos: $SP^2 = SK^2 + PK^2$ o bien $(b-a)^2 + x^2 = \left(\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} - x\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Después de resolver esta ecuación, hallamos: $x = \frac{\sqrt{3}\,a\,(2b-a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$.

Como hemos señalado más arriba, $AD = AB$, es decir, $AD = a$. Pero $SA > AD$. De modo que, según el sentido del problema, $b > a$.

$$\text{Así, pues, } PB = \frac{\sqrt{3}\,a\,(2b-a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}, \text{ donde } b > a.$$

OBSERVACIÓN. Llamamos la atención del lector a que la desigualdad $b > a$ fue obtenida a base de razonamientos que se desprenden del sentido del problema y no de la fórmula que obtuvimos para la magnitud buscada. De la fórmula para PB hemos hallado que a y b deben satisfacer las desigualdades del sistema $\begin{cases} 2b-a > 0, \\ 3b^2-a^2 > 0 \end{cases}$, (las desigualdades $a > 0$ y $b > 0$ se han omitido ya que son evidentes). Del sistema ofrecido obtendríamos que $b > \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Sin embargo, resulta que esta dependencia sólo es suficiente para la existencia de la propia pirámide: en el triángulo rectángulo SAO la hipotenusa será mayor que el cateto. Para la existencia de la esfera tangente a SA, la dependencia $b > \frac{a\sqrt{3}}{3}$ es insuficiente. En efecto, sea $b = 0{,}8a$ $\left(\text{en este caso } b > \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$. Como dijimos más arriba $AD = a$. De este modo, $AD > SA$, o sea, la esfera será tangente no al propio segmento SA, sino a su continuación.

EJEMPLO 2. Está dado el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ en el que la arista es igual a a. Por los vértices A y C y por los puntos medios de las aristas B_1C_1 y C_1D_1 se traza la esfera Ω. Hallemos su radio.

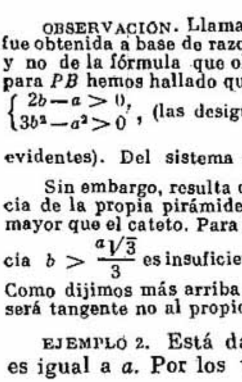


Fig. 156

SOLUCIÓN. Sea la figura $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 156) la representación del cubo dado y F_1 y E_1, los puntos medios de sus aristas B_1C_1 y C_1D_1, respectivamente. La indicada representación es completa y métricamente definida (cerciórense de esto por su cuenta). Como en el anterior ejemplo, es muy dificultosa la construcción de la representación de la esfera dada, ya que no conocemos la longitud de su radio. No obstante, la representación de la esfera no es muy necesaria: si en ella estuviera indicado el centro de la esfera y alguno de sus puntos (aquí se muestran cuatro puntos), sería posible calcular también la longitud del radio.

Ante todo, busquemos el punto M, centro de la esfera Ω. Como los puntos A y C pertenecen a la esfera Ω, el punto M pertenece al lugar geométrico de los puntos equidistantes de A y C. Es fácil adivinar que ese lugar geométrico de puntos es el plano diagonal BB_1D_1D. Por analogía, el punto M pertenece al plano diagonal AA_1C_1C. Así, pues, M pertenece a la recta OO_1 por la que se intersecan los planos ACC_1 y BDD_1.

Por fin, el punto M pertenece al plano α que corta el segmento CE_1 en L que es el punto medio de CE_1, con la particularidad de que $\alpha \perp CE_1$. Como los planos α y DCC_1 tienen el punto común L, ellos se intersecan por la recta l que pasa por el punto L, pero como $CE_1 \perp \alpha$, $CE_1 \perp l$.

Construyamos E, que es el punto medio del segmento CD, y el segmento EE_1. Como la representación en la que se realizan las construcciones adicionales está métricamente definida, no podemos trazar al azar por el punto L la recta l y decir que $l \perp CE_1$. Además, la recta l corta el segmento EE_1. Designemos con K su punto de intersección. Entonces, el $\triangle KLE_1$ será rectángulo y semejante al $\triangle CEE_1$. De la semejanza de estos triángulos se desprende que $KE_1 : CE_1 = LE_1 : EE_1$ y como $EE_1 = a$, $CE = \frac{a}{2}$, $CE_1 = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ y $LE_1 = \frac{a\sqrt{5}}{4}$.

Así, pues, hallamos que si $l \perp CE_1$, $KE_1 = \frac{5}{8}a$. Empleando esta igualdad construimos el punto K. Más adelante construimos OE y por el punto K trazamos la recta $k \parallel OE$.

La recta k yace en el plano OEK y corta OO_1. Designemos su punto de intersección con M. Entonces, ya que $MK \parallel OE$ y OE es perpendicular al plano DCC_1, MK es perpendicular al plano DCC_1.

De modo que $CE_1 \perp LK$ y $CE_1 \perp MK$. Entonces, CE_1 es perpendicular al plano LKM. Con otras palabras, el plano LKM coincide con el plano α y, por lo tanto, el punto M yace en el plano α y, por ello, el punto M es el centro de la esfera Ω.

Hallemos ME_1, es decir, el radio de la esfera Ω. Del $\triangle MKE_1$ rectángulo, obtenemos: $ME_1 = \sqrt{MK^2 + KE_1^2} = \frac{a\sqrt{41}}{8}$.

$\Big($Hubiera sido posible buscar MC, o sea, el radio de la esfera Ω del triángulo rectángulo MCO, donde $OM = \frac{3}{8}a$, $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.$\Big)$

EJEMPLO 3. Un ángulo triedro está formado por los planos α, β y γ, con la particularidad de que $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$ y $\angle\alpha\beta = 2\varphi$. La esfera Σ es tangente al plano γ en el punto B, en tanto que los planos α y β son intersecados por las circunferencias ω_1 y ω_2, cuyos radios son iguales a r. La distancia desde en punto O, que es el centro de la esfera, al punto A, que es el vértice del ángulo triedro, es igual a l. Hallemos el radio de la esfera.

SOLUCIÓN. La representación tridimensional de la combinación de la esfera Σ y el ángulo triedro $\alpha\beta\gamma$ es muy complicada. Para construir la representación apliquemos el método de la proyección ortogonal sobre un par de planos de proyección H y V, perpendiculares entre sí, que serán elegidos partiendo de las siguientes consideraciones. Como la esfera Σ es tangente al plano γ en el punto B, $OB \perp \gamma$. Ya que $\alpha \perp \gamma$ y $\beta \perp \gamma$, la línea de intersección de los planos α y β es también perpendicular al plano γ. Sea que los planos α y β se cortan por la recta AC. Entonces, $AC \perp \gamma$ y, por lo tanto, $OB \parallel AC$.

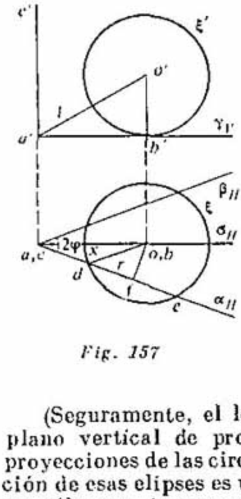


Fig. 157

Con las rectas OB y AC se define plenamente cierto plano σ, con la particularidad de que como la recta OB yace en el plano σ, $\sigma \perp \gamma$. Tomemos γ como el *plano horizontal de proyecciones* y, siguiendo las anotaciones adoptadas en geometría descriptiva, llamémoslo plano H. Tomamos σ como el *plano vertical de proyecciones* y lo designamos con V.

Señalemos, que como las circunferencias ω_1 y ω_2 son iguales, el punto O es equidistante a los planos α y β y, por consiguiente, V es el plano bisectriz del ángulo diedro formado por los planos α y β y el plano V interseca la esfera Σ por la circunferencia del círculo mayor. Los diagramas de las proyecciones canónicas de la combinación de la esfera Σ y el ángulo triedro $\alpha\beta\gamma$ se ofrecen en la fig. 157.

(Seguramente, el lector prestará atención al hecho de que en el plano vertical de proyección no se muestran elipses que son las proyecciones de las circunferencias ω_1 y ω_2 en el plano V. La construcción de esas elipses es una tarea no muy complicada, pero en adelante no sólo son innecesarias, sino que superfluamente recargarían el dibujo.)

Así, pues, en el diagrama vemos en el plano V la sección de la esfera Σ con el plano σ que pasa por el centro de la esfera, es decir, el punto O y por el vértice del ángulo triedro, por ello $a'o' = l$. En el plano H vemos la representación del ángulo diedro $\alpha\beta$ a tamaño natural, por lo que $\angle\alpha_H\beta_H = 2\varphi$ y $\angle\alpha_H\sigma_H = \varphi$, en tanto que el segmento de es la representación de la proyección horizontal de la circunferencia ω_1, es decir, $de = 2r$ y, por fin, el radio buscado de la esfera Σ es igual al radio de las circunferencias ξ y ξ' que son las proyecciones horizontal y vertical de la esfera Σ, respectivamente.

Bajemos desde el punto o en el plano H la perpendicular of a α_H (el segmento of es la representación del segmento $of \perp \alpha$). Entonces, $df = r$. Para abreviar, hagamos el radio de la esfera Σ igual a x.

En tal caso, los radios de las circunferencias ξ y ξ' serán asimismo iguales a x, o sea, $od = x$ y $o'b' = x$.

De este modo, del $\triangle o'a'b'$ rectángulo, obtenemos: $a'b' = \sqrt{l^2 - x^2}$. Pero, como es fácil advertir, $ao = a'b'$. Así, pues, también $ao = \sqrt{l^2 - x^2}$ y, entonces, ya que $\angle aof = \varphi$, del triángulo rectángulo aof, tenemos: $of = ao \operatorname{sen} \varphi = \sqrt{l^2 - x^2} \operatorname{sen} \varphi$ y, por consiguiente, del triángulo rectángulo odf:

$$x^2 = r^2 + (l^2 - x^2) \operatorname{sen}^2 \varphi. \tag{1}$$

Al resolver esta ecuación con relación a x^2 hallamos: $x^2 = \frac{r^2 + l^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{1 + \operatorname{sen}^2 \varphi}$.

Rechazando de inmediato los valores negativos de x, que a ciencia cierta son extraños, obtenemos: $x = \sqrt{\frac{r^2 + l^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{1 + \operatorname{sen}^2 \varphi}}$.

Aclaremos ahora, según el sentido del problema, a qué restricciones deben satisfacer r, l y φ para que el valor hallado de x (una de las soluciones de la ecuación cuadrática (1)) sea la longitud del radio de la esfera Σ.

Primero, como 2φ es el ángulo entre los planos (α y β), $0° < 2\varphi < 90°$, o sea, $0° < \varphi < 45°$.

Segundo,

$$\begin{cases} of < x < ao \\ x > df \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} \sqrt{l^2 - x^2} \operatorname{sen} \varphi < x < \sqrt{l^2 - x^2}, \\ x > r. \end{cases}$$

Poniendo en este sistema de desigualdades el valor de x y resolviendo el sistema obtenido de desigualdades, hallamos que $r < \frac{\sqrt{2}}{2} l \cos \varphi$.

$$\text{Así, pues, } OB = \sqrt{\frac{r^2 + l^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{1 + \operatorname{sen}^2 \varphi}}, \text{ donde } \begin{cases} r < \frac{\sqrt{2}}{2} l \cos \varphi, \\ 0° < \varphi < 45°. \end{cases}$$

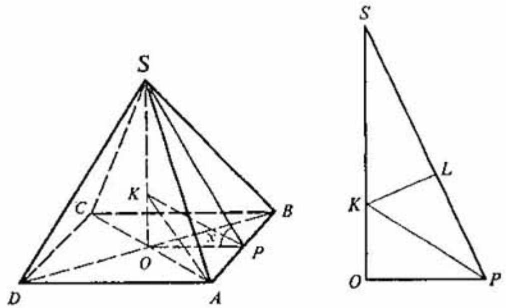
OBSERVACIÓN. Podría parecer que en la expresión hallada para el valor de x, los parámetros r, l y φ pueden tomar cualesquiera valores reales (el radicando será positivo), pero, como ha mostrado la investigación, realizada según el sentido del problema, ello está muy lejos de la realidad.

EJEMPLO 4. El centro de una esfera, inscrita en una pirámide cuadrangular regular, coincide con el centro de una esfera circunscrita a dicha pirámide. Hallemos el ángulo diedro en la arista de la base de la figura.

SOLUCIÓN. Sea la figura $SABCD$ la representación de una pirámide cuadrangular regular (fig. 158, a). Ésta es completa y para ella $p = 4$. Construyamos SP, es decir, la altura de la cara lateral SAB

y OP, su proyección en el plano ABC. Vamos a considerar que PK es la representación de la bisectriz del ángulo SPO, es decir, que el punto K es la representación del centro de la esfera inscrita Ω. De este modo, para la representación se consume un parámetro más y ella se convierte en métricamente definida.

Como de acuerdo con el planteamiento el punto K también es el centro de la esfera circunscrita Σ, debemos considerar que AK y SK son las representaciones de diversos segmentos en el original,



(a) (b)

Fig. 158

es decir, abreviando, $AK = SK$. Como vemos, no es preciso mostrar las representaciones de las esferas Ω y Σ.

Así, pues, OK es el radio de la esfera inscrita, AK, el radio de la esfera circunscrita y se requiere hallar el ángulo diedro en la arista AB de la pirámide, o sea, $\angle SABO$.

Como $SP \perp AB$ y OP es la proyección de SP en el plano ABC, $OP \perp AB$. Por lo tanto, $\angle SPO$ es el ángulo lineal del diedro $SABO$ que buscamos. Para abreviar, hagamos $\angle SPO = x$ y, para realizar los cálculos, introduzcamos un parámetro auxiliar haciendo $AB = a$.

Consideremos el triángulo rectángulo SOP (fig. 158, b). Bajemos del punto K la perpendicular KL a la apotema SP. Es evidente que en el original tendremos K_0L_0 perpendicular al plano $S_0A_0B_0$, es decir, KL es la representación del radio de la esfera inscrita en la pirámide. Esto significa que $KL = OK$. Así, pues, en el triángulo SKL SK es el radio de la esfera circunscrita a la pirámide, en tanto que KL, el radio de la esfera inscrita en ella. Pero, en el triángulo rectángulo OAK (fig. 158, a) AK es el radio de la esfera circunscrita y OK, el de la inscrita. Entonces, en estos triángulos también $SL = OA$. Pero, es fácil calcular que $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. De modo que $SP =$

$= SL + LP = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2}$ y, a continuación, obtenemos: $\cos x = \frac{OP}{SP} = \frac{a}{2} : \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2}\right) = \sqrt{2} - 1$, de donde $x = \arccos(\sqrt{2} - 1)$.

PROBLEMAS PARA EL TRABAJO INDIVIDUAL

853. El lado de un rombo es igual a a. Una esfera de radio R es tangente a todos los lados del rombo. La distancia desde el centro de la esfera hasta el plano del rombo es igual a α. Hallen el área del rombo.

854. En la superficie de una esfera, cuyo radio es R, están dadas dos circunferencias diferentes en las que la cuerda común es a. Hallen los radios de dichas circunferencias si sus planos son perpendiculares entre sí.

855. Una esfera de radio R está inscrita en un cono, cuya generatriz se ve desde el centro de la esfera bajo el ángulo α. Hallen el volumen del cono.

856. En una semiesfera de radio R está inscrito un cono truncado de tal forma que su base mayor coincide con la base de la semiesfera y la generatriz está inclinada hacia el plano de la base bajo el ángulo α. Hallen el área total del cono.

857. En un cono circular recto se dan el área de la base S_1 y el área lateral S_2. Hallen el radio de la esfera inscrita en el cono.

858. En un cono está inscrita una esfera de forma que el radio de la circunferencia de su tangencia con el cono es igual a R. Una recta que pasa por el centro de la esfera y por un punto que yace en la circunferencia de tangencia, forma con el plano de la base del cono el ángulo α. Hallen el volumen del cono.

859. Hallen el ángulo en el vértice en la sección axial de un cono si sabemos que en su superficie se pueden trazar tres generatrices perpendiculares en sí a pares.

860. Dos conos iguales con ángulo α en el vértice en la sección axial, están dispuestos de modo que el eje de cada uno de ellos es la generatriz del otro. Hallen el ángulo entre las dos generatrices por las que dichos conos se intersecan.

861. Un plano paralelo a la base de un cono y que pasa por el centro de la esfera inscrita en dicho cono, divide a éste en dos partes, cuyos volúmenes son iguales. Hallen el ángulo entre la generatriz del cono y el plano de su base.

862. En un cono equilátero está inscrita una semiesfera de modo que su círculo mayor se encuentra en el plano de la base del cono. Hallen la razón en la que la circunferencia de tangencia divide la superficie lateral de la semiesfera y la superficie lateral del cono.

863. En un cono están dispuestas dos esferas de modo que ellas son tangentes entre sí y a la superficie del cono. La razón entre los radios de dichas esferas es igual a $m : n$ $(m > n)$. Hallen el ángulo en el vértice de la sección axial del cono.

864. Demuestren que la razón entre el volumen del cono y el volumen de la esfera inscrita en él es igual a la razón entre el área total del cono y el área de la esfera.

865. En un cono truncado está inscrita una esfera, cuyo volumen constituye $\frac{6}{13}$ del volumen del cono. Hallen el ángulo entre la generatriz del cono y el plano de su base inferior.

866. En una semiesfera está inscrito un cono, cuyo vértice coincide con el centro de la circunferencia que sirve de base a la semiesfera. El plano de la base del cono es paralelo al plano de la base de la semiesfera; la recta que une

el centro de la base del cono con un punto, tomado al azar, en la circunferencia del círculo mayor de la semiesfera constituye con el plano de la base del con el ángulo α. Hallen la razón entre los volúmenes de la semiesfera y del cono.

867. En un cono está inscrita una esfera. Su línea de tangencia divide el área de la esfera en la razón $m : n$. Hallen el ángulo entre la generatriz del cono y su eje.

868. En un cubo está inscrita una pirámide. Uno de sus vértices es el centroide de la cara del cubo, los otros cuatro son los vértices de las caras opuestas del cubo. En la pirámide está inscrita una esfera. ¿En qué razón divide el volumen del cubo el plano paralelo a la base de la pirámide, que pasa por el centro de la esfera?

869. Una esfera es tangente a la superficie lateral de un cono por la circunferencia de la base. Con ello, el área de la superficie de la esfera se divide en partes de las cuales una de ellas es n veces mayor que la otra. Hallen el ángulo entre la generatriz del cono y el plano de su base.

870. Una pirámide triangular está circunscrita a un cono. La superficie lateral del cono se divide por las líneas de tangencia en partes, entre cuyas áreas existe la razón $5 : 6 : 7$. ¿En qué razón dividen dichas líneas el área lateral de la pirámide?

871. En un cono está inscrito un cilindro, cuya área total es igual al área lateral del cono. El ángulo entre las generatrices del cono en su sección axial es igual a 90°. Demuestren que la distancia desde el vértice del cono hasta la base superior del cilindro es igual a la mitad de la generatriz del cono.

872. Dos conos tienen base común. En la sección axial común la generatriz de uno de ellos es perpendicular a la generatriz opuesta del otro. El volumen de uno de los conos es dos veces menor que el del otro. Hallen el ángulo entre la generatriz del cono mayor y el plano de las bases de los conos.

873. De un punto tomado en la superficie de un esfera se han trazado tres cuerdas iguales. El ángulo entre cada par de ellas es igual a α. Hallen la longitud de las cuerdas si el radio de la esfera es igual a R.

874. La base de una pirámide es un triángulo isósceles, en el que cada uno de los lados laterales es igual a a, en tanto que el ángulo entre ellos es igual a α. Dos caras laterales son perpendiculares al plano de la base, mientras que la tercera forma con ella el ángulo β. Hallen el radio de la esfera inscrita en la pirámide.

875. Por los puntos medios de las aristas de un cubo pasa una esfera tangente a una de las bases del cubo. ¿Qué parte del volumen del cubo se encuentra en el interior de la esfera?

876. En un cubo con arista a está inscrita una esfera de modo que su superficie es tangente a todas las aristas del cubo. Hallen el volumen de la parte de la esfera comprendida dentro del cubo.

877. La arista de un cubo es igual a a. Hallen el radio de dos esferas iguales que pueden ser introducidas en el cubo de forma que ellas no puedan desplazarse en el interior del cubo cuando éste se pone en movimiento.

878. En un cubo con arista a está inscrita una esfera. A continuación, en uno de los ángulos triedros en el vértice del cubo está inscrita la segunda esfera tangente a la primera. Hallen el radio de la segunda esfera.

879. Una esfera pasa por los vértices A, B y D del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ y por el punto medio de la arista A_1B_1. Hallen el radio de la esfera si la arista del cubo es igual a a.

880. Una esfera es tangente a tres caras de un cubo que contienen un vértice y tres aristas de dicho cubo, que contienen el vértice opuesto. Hallen la arista del cubo si el radio de la esfera es igual a R.

881. Una esfera es tangente a tres caras de un cubo que contienen un vértice y pasa por el vértice del cubo opuesto al primero. Hallen el radio de la esfera si la arista del cubo es igual a a.

882. Una esfera es tangente a tres aristas de un cubo que contienen un

vértice y pasa por el vértice del cubo opuesto al primero. Hallen el radio de la esfera si la arista del cubo es igual a a.

883. Una esfera pasa por los puntos medios de tres aristas de un cubo que contienen un vértice y por el vértice del cubo opuesto al primero. Hallen la arista del cubo si el radio de la esfera es igual a R.

884. Una esfera es tangente a cuatro aristas de un cubo pertenecientes a una de sus caras y a la cara opuesta. Hallen la razón entre el volumen de aquella parte de la esfera, situada fuera del cubo, y el volumen de la esfera.

885. Una esfera pasa por los vértices de la base inferior de un cubo y es tangente a las aristas de su base superior. Hallen la razón entre la arista del cubo y el radio de la esfera.

886. Una esfera es tangente a todas las aristas de un prisma cuadrangular regular y a su base. Hallen la razón entre el área de la superficie de la esfera, situada fuera del prisma, y el área total de éste.

887. Una esfera está inscrita en un prisma recto, cuya base es un triángulo, en el cual la perpendicular bajada del vértice del ángulo recto a la hipotenusa es igual a h y forma con uno de los catetos el ángulo α. Hallen el volumen del prisma.

888. En el prisma triangular regular $ABCA_1B_1C_1$ por el lado AB de la base se traza un plano que asimismo pasa por el vértice C_1 de otra base. En la pirámide $C_1ABB_1A_1$ (C_1 es el vértice) está inscrita una esfera. Hallen el ángulo entre el plano ABC_1 y el de la base del prisma.

889. A una esfera está circunscrito un paralelepípedo recto, cuyo volumen es m veces mayor que el de la esfera. Hallen los ángulos en las bases del paralelepípedo.

890. La arista de un tetraedro regular es igual a a. Hallen el radio de la esfera tangente a las caras laterales del tetraedro en los vértices de la base.

891. La arista de un tetraedro regular es igual a a. Hallen el radio de la esfera tangente a las caras laterales del tetraedro en los puntos que yacen en los lados de la base.

892. Demuestren que si los vértices de la base inferior de un prisma triangular recto yacen en la superficie de una esfera, en tanto que los lados de la base superior son tangentes a dicha esfera, el prisma es regular.

893. Una esfera es tangete a todas las caras laterales de una pirámide triangular en los centros de las circunferencias circunscritas a ellas. Cada ángulo plano en el vértice de la pirámide es igual a 2α, en tanto que la suma de las aristas laterales es igual a $3a$. Hallen el radio de la esfera.

894. La altura de una pirámide triangular es igual a H, la suma de los nueve ángulos planos en los vértices de la base es igual a α. Hallen el radio de la esfera que es tangente a todas las caras laterales en los puntos de intersección de sus medianas.

895. El área lateral de una pirámide tringular es igual a S, en tanto que el lado de la base, a a. La esfera es tangente a tres aristas de la base en sus puntos medios y corta las aristas laterales por sus puntos medios. Hallen el radio de la esfera.

896. Todos los ángulos planos en el vértice S de una pirámide son rectos. Demuestren que el vértice S, el centro de la esfera circunscrita a la pirámide y el punto de intersección de las medianas de la base ABC yacen en una misma recta.

897. Una esfera de radio R está inscrita en una pirámide en la que el ángulo de inclinación de cada una de las caras es igual a α. Hallen el volumen de la pirámide si su base es un rombo, cuyo ángulo agudo es igual a β.

898. En la pirámide regular $SABCD$, con el vértice en S, el lado de la base es igual a a, la arista lateral, a b. La primera esfera con centro en el punto O_1 es tangente a los planos SAD y SBC en los puntos A y B, respectivamente, mientras que la segunda esfera, con centro en el punto O_2, es tangente a los

planos SAB y SCD en los puntos B y C, correspondientemente. Hallen el volumen de la pirámide ABO_1O_2.

899. Hallen el radio de la esfera inscrita en una pirámide cuadrangular regular si el volumen de ésta es igual a V y el ángulo entre dos de sus caras opuestas es igual a α.

900. La base de una pirámide es un triángulo isósceles en el que cada uno de los ángulos iguales es igual a α y el lado común de estos ángulos, a a. Cada una de las caras laterales de la pirámide está inclinada hacia el plano de la base bajo el ángulo β. Hallen el radio de la esfera inscrita en la pirámide.

901. En una esfera de radio R está inscrita una pirámide cuya base es un cuadrado. Una de las aristas laterales es perpendicular al plano de la base, mientras que la mayor arista forma con él un ángulo α. Hallen el área lateral de la pirámide.

902. En una pirámide cuadrangular regular el ángulo plano en el vértice es igual a α, la altura de la pirámide es igual a H y sirve de diámetro a una esfera. Hallen la longitud de la línea de intersección de las superficies de la pirámide y la esfera.

903. En una pirámide cuadrangular regular se encuentran dos esferas, tangentes entre sí y a todas las caras de la pirámide. La esfera inferior también es tangente a la base de la pirámide. La razón entre los radios de las esferas grande y pequeña es igual a n. Hallen los ángulos diedros de la pirámide.

904. En una pirámide triangular regular el ángulo plano en el vértice es igual a α. En ella está inscrita una esfera. ¿En qué partes divide el área de la esfera un plano trazado por los puntos de tangencia de ésta con las caras laterales de la pirámide?

905. La arista lateral de una pirámide cuadrangular regular es igual a b y el ángulo formado por la arista lateral y el plano de la base, igual a α. En esta pirámide está inscrito un cilindro equilátero de forma que una de sus generatrices está situada en la diagonal de la base de la pirámide, en tanto que la circunferencia de la base es tangente a dos de las caras adyacentes laterales de la pirámide. Hallen el radio de la base del cilindro.

906. En un cilindro, cuya altura es igual a H está inscrita una pirámide. Dos caras de ésta son perpendiculares al plano de su base, mientras que dos aristas laterales forman con el plano de la base ángulos, cada uno de los cuales es igual a α. El ángulo entre estas aristas es igual a β. Hallen el área lateral de la pirámide.

907. La arista de un tetraedro regular es igual a a. Una superficie cilíndrica pasa por una de sus aristas y por todos sus vértices. Hallen el radio de la base del cilindro.

908. Las bases de una capa esférica y un cilindro coinciden. El volumen del cuerpo comprendido entre sus superficies laterales es igual a 36π cm^3. Hallen la altura del cilindro igual a la altura de la capa esférica.

909. En un cono con un radio igual a R en la base está inscrito un prisma triangular con aristas iguales de forma que su base yace en el plano de la base del cono. Hallen el volumen del prisma si el ángulo entre las generatrices del cono y el plano de su base es igual a α.

910. En un cubo, cuya arista es igual a a, está inscrito un cono recto circular con ángulo entre las generatrices en la sección axial igual a α. Hallen la longitud de la generatriz y el radio de la base del cono si su altura yace en la diagonal del cubo.

911. El cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ está inscrito en un cono en el que el radio de la base es igual a R y su altura, a $R\sqrt{2}$. La base $ABCD$ del cubo está situada en la base del cono, en tanto que los puntos A_1, B_1, C_1 y D_1, en su superficie lateral. Hallen el área del triángulo A_1C_1M, donde M es el punto de intersección de la recta BD con la circunferencia de la base.

912. Dos conos tienen bases concéntricas y altura común igual a H. La diferencia entre los ángulos que forman las generatrices con el eje es igual a β

el ángulo entre la generatriz del cono interior y el plano de la base es igual a α. Hallen el volumen de la parte del espacio comprendido entre las superficies de los conos.

913. Los lados de un trapecio isósceles son tangentes a un cilindro, cuyo eje es perpendicular a los lados paralelos del trapecio. Hallen el ángulo entre el plano del trapecio y el eje del cilindro si las bases del trapecio son iguales a a y b $(a > b)$ y su altura, a h.

914. En una hoja rectangular de papel, en el que un lado es igual a a, se han construido cinco circunferencias, una de las cuales tiene un radio igual a $\frac{a}{12}$ y la otra, a $\frac{a}{4}$. La distancia entre los centros de las circunferencias es igual a $\frac{2a}{3}$, en tanto que la línea de los centros es paralela a la base del rectángulo. A las circunferencias se ha trazado una tangente interior común. Hallen la distancia entre los puntos de tangencia después de enrollar la hoja en forma de una superficie cilíndrica circular, cuyo eje es perpendicular a la línea de los centros de las circunferencias.

915. Están dados un cubo y una pirámide cuadrangular regular, cuya arista lateral es igual a b. Los vértices de una de las caras del cubo son los puntos medios de las aristas de la base de la pirámide, mientras que cada una de las aristas de la cara opuesta del cubo corta una de las aristas laterales de la pirámide. Hallen el volumen de la parte del cubo situada fuera de la pirámide.

916. En un cubo, cuya arista es igual a a, se ha trazado una diagonal. Las aristas del cubo que convergen en uno de los extremos de la diagonal están divididas por la mitad. Los puntos de división obtenidos y el otro extremo de la diagonal se han tomado como los vértices de una pirámide. Hallen el volumen de esta figura.

917. Las aristas de una pirámide triangular, que salen del vértice A, son perpendiculares a pares e iguales a a, b y c. Hallen el volumen del cubo inscrito en la pirámide de forma que uno de sus vértices coincide con el vértice A.

918. La arista lateral de una pirámide triangular regular es igual a b y forma con el plano de la base el ángulo α. En la pirámide está inscrito un cilindro equilátero de forma que su base inferior yace en el plano de la base de la pirámide. Hallen la altura de la pirámide.

919. En una hoja de papel, que es el cuadrado $PQML$, se ha hecho un agujero en forma del triángulo equilátero ABC de manera que $AB \parallel PL$ y $AB : PL = 1 : 2$. A continuación, el cuadrado se ha enrollado en una superficie cilíndrica circular, cuyo eje es perpendicular al segmento AB. Hallen la razón entre el área del cuadrado y el área del triángulo ABC, cuyos vértices yacen en la superficie cilíndrica.

§ 16. VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Al resolver problemas estereométricos para buscar los valores máximos y mínimos vamos a observar el mismo plan que empleábamos al resolver problemas planimétricos dedicados a determinar los valores máximos y mínimos (cap. 1, § 7).

EJEMPLO 1. Un cubo se corta con un plano que pasa por una de sus diagonales. Demostremos que tiene la menor área aquella sección que forma con el plano de la base el ángulo $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$.

SOLUCIÓN. La magnitud que vamos a optimizar es S, es decir, el área de la sección. Sea la arista del cubo igual a a (magnitud conocida) y B_1KDL, cierta sección (fig. 159). Introduzcamos una variable independiente: $C_1K = x$. De acuerdo con el sentido del problema, es evidente que $0 \leqslant x \leqslant a$ son los límites reales de la variación de x.

Expresemos el área S de la sección con x y a. Ante todo, señalemos que en la sección hemos obtenido un paralelogramo, ya que las líneas de intersección de dos planos paralelos con tercer plano son paralelas entre sí. El área del paralelogramo se puede hallar con la fórmula $B_1K \cdot KD \cdot \operatorname{sen} \alpha$, donde $\alpha = \angle B_1KD$. Del triángulo B_1C_1K hallamos: $B_1K = \sqrt{a^2+x^2}$ y del triángulo DKC, $DK = \sqrt{a^2+(a-x)^2}$. Del triángulo B_1KD, según el teorema de los cosenos, obtenemos: $B_1D^2 = B_1K^2 + KD^2 - 2B_1K \cdot KD \cdot \cos \alpha$, es decir, $(a\sqrt{3})^2 = (a^2+x^2) + (a^2+(a-x)^2) - 2\sqrt{a^2+x^2} \times \sqrt{a^2+(a-x)^2} \cos \alpha$, de donde después de una serie de transformaciones obtenemos:

$$\cos \alpha = \frac{x^2-ax}{\sqrt{a^2+x^2} \cdot \sqrt{a^2+(a-x)^2}}.$$

Entonces, $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{(x^2-ax)^2}{(a^2+x^2)(a^2+(a-x)^2)}} = \frac{a\sqrt{2a^2+2x^2-2ax}}{\sqrt{a^2+x^2}\sqrt{a^2+(a-x)^2}}$.

Como resultado, obtenemos: $S = B_1K \cdot KD \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{a^2+x^2} \times \sqrt{a^2+(a-x)^2} \cdot \frac{a\sqrt{2a^2+2x^2-2ax}}{\sqrt{a^2+x^2}\sqrt{a^2+(a-x)^2}} = a\sqrt{2a^2+2x^2-2ax}$.

Es preciso hallar el valor mínimo de la función $S(x) = a\sqrt{2a^2+2x^2-2ax}$ en $[0; a]$. $S' = a \cdot \frac{2x-a}{\sqrt{2a^2+2x^2+2ax}}$.

En el caso dado no hay puntos donde S' no exista, ya que el denominador de la derivada no se reduce a cero en ningún lugar (de acuerdo con el planteamiento $a \geqslant x$, entonces $a^2 \geqslant ax$ y $2a^2 + 2x^2 - 2ax > 0$). $S' = 0$ si $2x - a = 0$, es decir, con $x = \frac{a}{2}$.

Con el fin de hallar el valor menor de la función sólo nos queda calcular los valores de la función $S(x)$ en los extremos del segmento $[0; a]$ y compararlos con el valor de la función en el punto $x = \frac{a}{2}$. Tenemos: $S(0) = a^2\sqrt{2}$, $S(a) = a^2\sqrt{2}$, $S\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. El valor mínimo de la función $S(x)$ es igual a $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. Éste se alcanza con $x = \frac{a}{2}$.

En el problema hay que demostrar que el ángulo mínimo que por el área de la sección forma con el plano de la base, es igual a $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$. Para demostrar este hecho hagamos uso de la fórmula $S_{\text{base}} = S_{\text{sec}} \cos\varphi$, donde φ es el ángulo entre los planos de la sección y de la base. Tenemos: $a^2 = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}\cos\varphi$, de donde hallamos: $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, es decir, $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

EJEMPLO 2. Un tronco de 20 dm de longitud tiene la forma de un cono truncado con diámetros de las bases 2 y 1 dm. Es necesario cortar del tronco una vigueta con sección transversal cuadrada, cuyo eje coincida con el del tronco y cuyo volumen sea el máximo.

SOLUCIÓN. La magnitud que vamos a optimizar V es el volumen de la vigueta, o sea, el volumen de un paralelepípedo rectangular con base cuadrada.

En la sección axial del cono, que al mismo tiempo es la sección diagonal de un paralelepípedo rectangular, obtenemos (fig. 160)

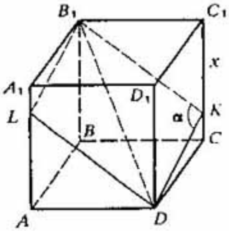


Fig. 159

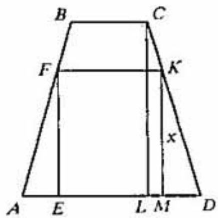


Fig. 160

un trapecio isósceles (sección axial del cono truncado), en el que está inscrito un rectángulo (la sección diagonal del paralelepípedo rectangular). Designemos con x la altura del paralelepípedo, es decir, la altura del rectángulo en la sección axial: $KM = x$. Los límites reales de variación de $x: 0 < x \leqslant 20$.

Hallemos el volumen V del paralelepípedo rectangular. El segmento FK es la diagonal de la base del paralelepípedo. Hallemos FK. Tenemos: $FK = EM = AD - 2MD = 2 - 2MD$. Tracemos $CL \perp AD$. Entonces, $LD = AD - AL = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ dm. Como los triángulos KMD y CLD son semejantes, $\frac{KM}{CL} = \frac{MD}{LD}$, o sea, $\frac{x}{20} = \frac{MD}{0{,}5}$, de donde hallamos: $MD = \frac{x}{40}$ y, por consiguiente, $FK = 2 - 2MD = 2 - \frac{x}{20}$.

El área del cuadrado, que es la base del paralelepípedo rectangular, puede ser hallada con la fórmula $S=\frac{1}{2}d^2$, donde d es la diagonal de la base, es decir, $d=FK$. Así, pues, $S_{\text{base}}=\frac{1}{2}\left(2-\frac{x}{20}\right)^2$. Como la altura del paralelepípedo es igual a x, para el volumen obtenemos el siguiente resultado: $V=\frac{1}{2}\left(2-\frac{x}{20}\right)^2 x$.

Para la función $V=\frac{1}{2}\left(2-\frac{x}{20}\right)^2 x$ hay que hallar el valor máximo en el intervalo $]0;\ 20]$.

Tenemos $V'=2\left(2-\frac{x}{20}\right)\left(-\frac{1}{20}\right)x+\left(2-\frac{x}{20}\right)^2=\left(2-\frac{x}{20}\right)\times\left(2-\frac{3x}{20}\right)$.

$V'=0$ con $x=40$ o bien con $x=\frac{40}{3}$. El valor de $x=40$ no pertenece al intervalo que consideramos. El valor máximo de la función es igual a $\frac{320}{27}$.

x	0	$\frac{40}{3}$	20
V	0	$\frac{320}{27}$	10

Hallemos la interpretación del resultado de este problema. Con el fin de cortar del tronco la vigueta de mayor volumen, hay que separar la parte más delgada del tronco de forma que quede un tronco de $13\frac{1}{3}$ dm de longitud y, a continuación, del tronco obtenido cortar una vigueta con sección transversal cuadrada (ésta se determina con el cuadrado inscrito en la base menor del tronco de $13\frac{1}{3}$ dm de longitud).

EJEMPLO 3. A una esfera de radio r está circunscrita una pirámide cuadrangular regular. Hallen el valor mínimo de su área lateral.

SOLUCIÓN. La magnitud a optimizar es S, es decir, el área lateral. Introduzcamos la variable independiente. Recordemos que el centro O de la esfera inscrita yace en la altura de la pirámide regular y, precisamente, en el punto de intersección de la altura con la bisectriz OK del ángulo entre la altura MK de la cara lateral y la proyección HK de dicha altura en el plano de la base (fig. 161). $OH=r$ es el radio de la esfera inscrita. Hagamos $\angle OKH=x$. Los límites reales de variación de x: $0<x<\frac{\pi}{4}$.

Expresemos S con r y x. Del triángulo OKH hallamos: $HK=r\operatorname{ctg}x$; del triángulo HKD hallamos: $KD=HK=r\operatorname{ctg}x$; del triángulo MHK hallamos: $MK=\frac{HK}{\cos 2x}=\frac{r\operatorname{ctg}x}{\cos 2x}$. Entonces, $S=$

$=4S_{\triangle MCD}=4KD\cdot MK=4r\operatorname{ctg}x\frac{r\operatorname{ctg}x}{\cos 2x}=4r^2\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\cos 2x}$.

Hallemos el valor mínimo de la función $S=4r^2\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\cos 2x}$ en el intervalo $\left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[$.

Tenemos: $S'=4r^2\frac{2\operatorname{ctg}x\left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)\cos 2x+2\operatorname{sen}2x\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 2x}=\frac{8r^2}{\cos^2 2x}\times$ $\times\operatorname{ctg}x\left(\operatorname{ctg}x\operatorname{sen}2x-\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)$.

S' no existe si $\cos 2x=0$ o bien $\operatorname{sen}x=0$, lo que no se cumple en el intervalo $\left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[$.

$S'=0$ si $\operatorname{ctg}x=0$, lo que no se cumple en el intervalo $\left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[$ o bien si $\operatorname{ctg}x\operatorname{sen}2x-\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x}=0$. Resolvamos esta ecuación trigonométrica.

Tenemos consecutivamente: $\frac{\cos x\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}x}-\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x}=0$,

$$\operatorname{sen}x\cos x\operatorname{sen}2x-\cos 2x=0,$$

$$\operatorname{sen}^2 2x-2\cos 2x=0,$$

$$1-\cos^2 2x-2\cos 2x=0,$$

$$\cos^2 2x+2\cos 2x-1=0,$$

$$(\cos 2x)_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}.$$

Sólo nos sirve el valor $\cos 2x=\sqrt{2}-1$, de donde se desprende que $x=\frac{1}{2}\arccos(\sqrt{2}-1)$.

Con el fin de cerciorarse de que con el valor hallado de x la función $S(x)$ adquiere el valor mínimo, calculemos los límites unilaterales de la función en los extremos del intervalo $\left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[$:

$$\lim_{x\to 0} S(x)=4r^2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\cos 2x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0} S(x)=4r^2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\cos 2x}=+\infty.$$

Esto significa, que en efecto en el punto obtenido la función $S(x)$ tiene el valor mínimo. Calculemos dicho valor.

Tenemos: $S=4r^2\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\cos 2x}$, con la particularidad de que $\cos 2x=$ $=\sqrt{2}-1$. Como $1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{2}{1-\cos 2x}$, $\operatorname{ctg}^2 x=\frac{2}{1-\cos 2x}-$

$-1=\frac{2}{1-(\sqrt{2}-1)}-1=\sqrt{2}+1$. Así, pues, $S_{\text{mín}}=4r^2\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=$
$=4r^2(\sqrt{2}+1)^2$.

Retornando al problema geométrico inicial, llegamos a la conclusión de que el valor mínimo del área lateral de la pirámide cuadrangular regular, circunscrita a la esfera de radio r, es igual a $4r^2(\sqrt{2}+1)^2$.

EJEMPLO 4. En una esfera está inscrita una pirámide n-gular. ¿Con qué ángulo diedro entre la cara lateral y el plano de la base de la pirámide el volumen de ésta será el máximo?

SOLUCIÓN. La magnitud que vamos a optimizar es V, o sea, el volumen de la pirámide. Introduzcamos una variable independiente.

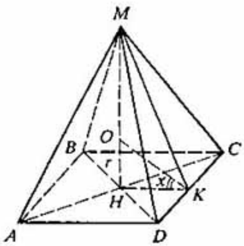


Fig. 161

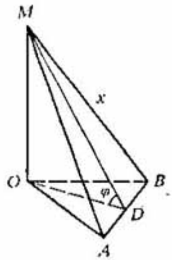


Fig. 162

Representemos en la fig. 162 la n-ésima parte de la pirámide: MAB es la cara lateral, MO, la altura. Designemos el radio de la esfera con la letra R (parámetro auxiliar). Hagamos $MB=x$. Los límites reales de variación de x: $0<x<2R$.

Expresemos V con x y R. Hagamos uso de la conocida fórmula para calcular el radio de la esfera inscrita en el caso de una pirámide regular: $R=\frac{b^2}{2H}$, donde b es la arista lateral, H, la altura de la pirámide. Entonces, $R=\frac{x^2}{2H}$, de donde $H=\frac{x^2}{2R}$. Del triángulo MBO hallamos $OB=\sqrt{MB^2-MO^2}=\sqrt{x^2-\frac{x^4}{2R^2}}$. Como AB es el lado de un n-gono regular, $\angle AOB=\frac{2\pi}{n}$ y, por esa razón, $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}AO\cdot OB\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{4R^2}\right)\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$.

De modo que $V=\frac{1}{3}S_{\text{base}}H=\frac{1}{3}n\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{4R^2}\right)\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{x^2}{2R}=$

$$=\frac{n\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}{12R}\left(x^4-\frac{x^6}{4R^2}\right).$$

Hallemos el valor máximo de la función $V=k\left(x^4-\frac{x^6}{4R^2}\right)$ en el intervalo $]0;\ 2R[$ $\left(\text{para abreviar hagamos } k=\frac{n\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}{12R}\right)$. Tenemos $V'=k\left(4x^3-\frac{6x^5}{4R^2}\right)$.

De la ecuación $V'=0$ hallamos: $x_1=0$, $x_2=R\sqrt{\frac{8}{3}}$, $x_3=-R\sqrt{\frac{8}{3}}$. De estos tres valores al intervalo $]0;\ 2R[$ sólo pertenece $x=R\sqrt{\frac{8}{3}}$.

Tenemos: $\lim\limits_{x\to 0} V(x)=\lim\limits_{x\to 2R} V(x)=0$. Es decir, con $x=R\sqrt{\frac{8}{3}}$ la función $V(x)$ alcanza el mayor valor. Él es igual a $\frac{16R^3n\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}{27}$.

En el problema es preciso hallar el ángulo MDO para la pirámide de volumen máximo, donde MD es la altura de la cara lateral. Hagamos $\angle MDO=\varphi$. Tenemos: $MO=\frac{x^2}{2R}=\frac{4R}{3}$ $\left(\text{poniendo en lugar de } x \text{ el valor hallado más arriba } R\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$. Del triángulo BDO hallamos: $OD=OB\cos\frac{\pi}{n}=\sqrt{x^2-\frac{x^4}{4R^2}}\cos\frac{\pi}{n}=\frac{2R\sqrt{2}}{3}\times\cos\frac{\pi}{n}$.

En tal caso, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{MO}{DO}=\frac{\sqrt{2}}{\cos\frac{\pi}{n}}$. De manera que $\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$.

PROBLEMAS PARA EL TRABAJO INDIVIDUAL

920. Demuestren que de todas las pirámides cuadrangulares regulares, en las que la suma de la altura y los lados de la base es constante, el volumen máximo lo tiene la pirámide en la que la cara lateral forma con el plano de la base un ángulo de 45°.

921. El área de la base de un paralelepípedo rectangular es igual a 1 cm^2 y la longitud de su diagonal, a 2 cm. Hallen: a) el volumen máximo; b) el área lateral máxima.

922. La suma de los cuadrados de las longitudes de todas las aristas de una pirámide triangular regular es igual a P. Hallen el valor máximo del área lateral de la pirámide.

923. La base de la pirámide $MABCD$ es un cuadrado. MB, la altura de la pirámide. Hallen el valor mínimo de la longitud de la arista MD si el volumen de la pirámide es igual a 9 cm^3.

924. Entre las pirámides n-gulares regulares con longitud constante de la arista lateral, hallen la pirámide con el volumen máximo (calculen el ángulo entre las aristas laterales y el plano de la base de la pirámide).

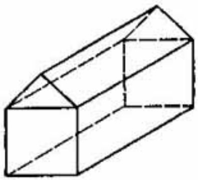


Fig. 163

925. Entre las pirámides n-gulares regulares con área constante de la cara lateral, hallen la pirámide con el volumen máxima (calculen el ángulo entre la cara lateral y el plano de la base).

926. «La casita» está constituida por dos prismas rectos con bases cuadradas y triangulares, con la particularidad de que la base triangular es un triángulo rectángulo isósceles (fig. 163). ¿Cuál debe ser el lado del cuadrado para que el volumen de «la casita» sea el máximo si sabemos que el perímetro de su base es igual a 24 m?

927. En una pirámide cuadrangular regular se trazan secciones paralelas a dos aristas no intersecantes. Demuestren que la sección que pasa por la línea media de la base de a pirámide es la que tiene la máxima área.

928. La base de la pirámide $MABC$ es el triángulo rectángulo isósceles ABC $(AB = BC)$. Las caras MBC y MAB son perpendiculares al plano de la base, $MC = 2\sqrt{2}$ cm. ¿Con qué altura de la pirámide el área de la sección que pasa por los puntos B y M y que divide por la mitad AC, será la máxima?

929. Por la diagonal de la base de un prisma cuadrangular regular se ha trazado una sección que con la otra base tiene por lo menos un punto común. Hallen el área máxima y mínima de semejante sección si las aristas del prisma, que salen de un mismo vértice, son iguales a $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ y 2 cm.

930. Demuestren que de todos los paralelepípedos rectangulares con base cuadrada, inscritos en una semiesfera, el volumen máximo lo tiene el cubo.

931. Demuestren que de todas las pirámides que tienen en su base un triángulo isósceles y que están inscritas en un cono de volumen prefijado, el volumen máximo lo tiene una pirámide regular.

932. Hallen el área máxima de la sección de un cono con un plano que pasa por su vértice si el radio de la base del cono es igual a R y su altura, a H.

933. Un cilindro termina por arriba en una semiesfera. El volumen del cuerpo es igual a V. ¿Con qué radio de la semiesfera el área total del cuerpo será la mínima?

934. El perímetro de un triángulo isósceles es igual a $2p$. ¿Cuáles deben ser sus lados para que sea el máximo el volumen del cuerpo obtenido debido a la rotación de dicho triángulo: a) alrededor de la base; b) en torno al la altura trazada a la base?

935. Del círculo dado se corta un sector y se enrolla en forma de un embudo cónico. ¿Cuál debe elegirse el ángulo central del sector para que el volumen del embudo sea el máximo?

936. En el cono dado inscriban el cilindro de volumen máximo.

937. En una esfera de radio R está inscrito un cilindro. ¿A qué será igual la altura de un cilindro que tenga: a) el volumen máximo; b) el área lateral máxima?

938. ¿Con qué altura del cono inscrito en la esfera dada de radio R: a) el volumen del cono será el máximo; b) el área lateral del cono será la máxima?

939. Un cono está circunscrito a una esfera de radio R. ¿A qué será igual la altura del cono que tiene: a) el volumen mínimo; b) el área mínima lateral?

940. Hallen la altura del cono de máximo volumen circunscrito a la semiesfera de radio R.

941. En la esfera dada está inscrito un cono de volumen máximo en el que,

a su vez, está inscrita una esfera. Hallen la razón entre los volúmenes de las esferas.

942. En una esfera está inscrito un cono de volumen máximo. A su vez, en el cono está inscrito un cilindro de volumen máximo. Hallen la razón entre la altura del cilindro y el radio de la esfera.

943. En un cono con generatriz constante está inscrito un prisma hexagonal regular, cuyas aristas son iguales. ¿Con qué valores del ángulo entre la generatriz del cono y el plano de la base el área lateral del prisma será la máxima?

944. En una pirámide cuadrangular regular está inscrito un cilindro de forma que la circunferencia de su base superior es tangente a todas las caras laterales de la pirámide, mientras que la base inferior yace en el plano de la base de la pirámide. ¿Qué parte de la altura de la pirámide debe constituir la altura del cilindro para que el volumen de éste sea el máximo?

945. En una semiesfera de radio R está inscrito un prisma triangular regular de modo que una de sus bases yace en el plano del círculo mayor de la semiesfera, en tanto que el vértice de la otra base pertenece a la superficie de la semiesfera. ¿Con qué altura del prisma la suma de las longitudes de todas sus aristas será la máxima?

946. Hallen el volumen máximo de una pirámide hexagonal regular inscrita en una esfera de radio R.

947. A una esfera está circunscrita una pirámide n-gular con el área lateral mínima. Hallen el ángulo de inclinación de su arista lateral al plano de la base.

948. En una esfera está inscrita una pirámide cuadrangular regular, en tanto que en ella está inscrito un prisma cuadrangular regular de forma que una de sus bases yace en el plano de la base de la pirámide y los vértices de la otra base del prisma pertenecen a las aristas laterales de la pirámide. El lado de la base y la altura del prisma son iguales a $2a$ y a, respectivamente. Hallen el valor mínimo del radio de la esfera. ¿Con qué altura de la pirámide se alcanza dicho valor mínimo?

949. La base de la pirámide $MABC$ es el triángulo rectángulo ABC en el que $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$ y $AC = 6$ cm. La arista SA es perpendicular al plano de la base, $SA = 3$ cm. En la pirámide $SABC$ está inscrita una pirámide con vértice A, cuya base es la sección de la pirámide dada con un plano paralelo a las aristas SA y BC. ¿A qué será igual el volumen máximo de la pirámide inscrita?

950. La altura de una pirámide cuadrangular regular es dos veces mayor que las diagonales de su base, el volumen de la pirámide es igual a V. Se consideran prismas cuadrangulares regulares inscritos en la pirámide de forma que sus aristas laterales son paralelas a las diagonales de la base de la pirámide, una cara lateral pertenece a dicha base, los vértices de la cara opuesta yacen en la superficie lateral de la pirámide. Hallen el máximo volumen del prisma.

951. El volumen de una pirámide cuadrangular regular es igual a V, el ángulo entre la arista lateral y el plano de la base, a $30°$. En la pirámide está inscrito un prisma triangular regular de forma que una de las aristas laterales yace en la diagonal de la base de la pirámide, una de las caras laterales es paralela a la base de la pirámide, en tanto que los vértices de esa cara yacen en las caras laterales de la pirámide. Hallen el máximo volumen del prisma.

SOLUCIONES E INDICACIONES

Capítulo I

2. m, $m\sqrt{3}$ y $2m$. 3. 56 y 42 cm. 4. $9\sqrt{5}$ cm, $8\sqrt{10}$ cm. 5. $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. 6. $\frac{mn(m+n)}{m^2+n^2}$. 7. 10 cm. 8. 15, 20 y 25 cm. 9. $\frac{m(m-n)\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $\frac{m(m+n)\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}$. 10. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)-\frac{\alpha}{2}$. 11. $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1+2\sqrt{2}}{4}$. Designen $\angle A=2x$ y $AB=c$. Expresen con c y x los catetos del triángulo y, a continuación, la bisectriz. 12. Designen $\angle ACK=\angle ACB=\alpha$ (CK es la altura, CM, la mediana, $AC<BC$), $CK=h$, $\angle ACB=x$. Expresen con h, α, x los segmentos AK, BK, MK y hagan uso de que $2MK=BK-AK$ (véase el ejemplo 10 del § 3). 15. 6 cm. 16. $\sqrt{10}$ cm. 17. $9\frac{1}{3}$ cm. 18. 7,2 cm.

19. $\frac{l}{2\operatorname{sen}\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{3\alpha}{4}\right)}$. 20. $\frac{2\operatorname{sen}(\alpha-30^\circ)}{\cos\alpha}$.

21. $\frac{\sqrt{1+8\cos^2\alpha}}{4\cos\alpha}$. 22. $\arccos\frac{1}{3}$; $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

23. $\frac{2\sqrt{3(p^2+q^2+pq)}}{3}$. 24. Por el punto E tracen la recta $EF \parallel AB$ (el punto F yace en AC) y hagan las necesarias conclusiones del análisis del paralelogramo $DBEF$. 25. $\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$. 26. 1 : 2. En el triángulo ADC tracen la línea media. 27. $\frac{a\cos\alpha}{\operatorname{sen}\left(45^\circ+\frac{3\alpha}{2}\right)}$. 28. $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{21}}{7}$; $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{21}}{14}$.

29. $\operatorname{arctg}\frac{1}{13}$. 30. $\operatorname{arcsen}\frac{72}{97}$. 31. 85°. Del punto M bajen las perpendiculares MK, ML y MN a los lados AB, AC y BC, respectivamente, designen $\angle BMC=x$, $AM=k$ y expresen, p.ej., MN como el elemento de referencia con k y x con ayuda de dos procedimientos. 37. 40°, 25°. 38. 4, 6 y 8 cm o bien $2\sqrt{6}$, $4\sqrt{6}$ y 6 cm; obtángulo. 39. 0,75. 40. Rectángulo.

41. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$. 42. $\sqrt{b(b+c)}$. 43. 10 cm. 44. $3\sqrt{5}$, 10 y 11 cm.

45. $\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{k}{2(k-1)}}$ si $k>2$; no hay soluciones si $1<k\leqslant 2$.

46. $\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$. 47. 45°. 54. Consideren los casos cuando los triángulos son regular, isósceles, rectángulo. Para el triángulo arbitrario hagan uso de la afirmación del ejemplo 8 del § 2. 55. Dispongan el triángulo como se muestra en la fig. 164 y tracen $C'D \parallel BC$. Hagan uso de la semejanza de los triángulos $AC'D$ y ABC. 56. Designen los ángulos con x, $2x$ y $4x$ y con ayuda del teorema de los senos expresen los lados mayores del triángulo mediante el menor. 57. 90°, 22°30′ y 67°30′. Sean CH, CD y CM la altura, la bisectriz y la mediana, respectivamente, del triángulo ABC. Designen $\angle C = 4x$, $CH = h$, hagan uso de que $AH + MH = BH - MH$ y expresen todos los elementos de esta igualdad con h y x. 58. $A + B = 90°$ o bien $|A - B| = 90°$. Expresen AD y BD con ayuda de la altura h y los ángulos A y B. Analicen dos casos: A es ángulo agudo y A es obtuso.

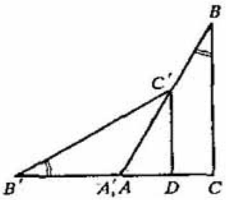


Fig. 164

59. $\frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{sen}\alpha}$. Tracen por el punto K la recta $MP \parallel AC$ (el punto M yace en AB, el punto P, en BC) e introduzcan la designación $MK = KP = PC = a$. Del triángulo KPC, con a, α y β, expresen el segmento KC y del triángulo MEK, el segmento EK. 61. Un rectángulo; $a-b$. 62. $\sqrt{2n(m+n)}$; $\sqrt{2(2m^2+3mn+n^2)}$. 63. 17, 10, 21 y $\sqrt{337}$ cm. 64. $\frac{\sqrt{p^2+q^2+2pq\cos\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$. 65. $2\sqrt{2}\cos\frac{\pi(m-n)}{4(m+n)}$. 66. $\frac{a\operatorname{sen}\alpha}{b+a\cos\alpha}$; $\frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a+b\cos\alpha}$. 67. $\arccos\frac{7}{18}$. 68. $\arcsin\frac{4-k^2}{k^2}$ y $\pi-\arcsin\frac{4-k^2}{k^2}$ si $\sqrt{2}\leqslant k<2$; no hay soluciones si $k<\sqrt{2}$ o bien $k\geqslant 2$. 69. Designen los lados del paralelogramo con a y ka y las diagonales, con d y kd. Empleando la fórmula que liga las diagonales y los lados, establezcan la dependencia entre

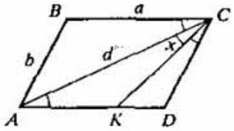


Fig. 165

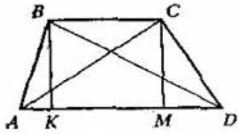


Fig. 166

a y d y, a continuación, utilicen dos veces el teorema de los senos. 70. Designen $\angle APB = \alpha$, $\angle ADB = \beta$ y desmuestren que $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 1$. 71. $\sqrt{a^2+b^2+2b\left(\sqrt{a^2-b^2\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\cos\alpha+b^2\operatorname{sen}^2\alpha\right)}$. Con el fin de buscar el ángulo obtuso entre el lado menor y la diagonal menor empleen el teorema de los senos y, seguidamente, hallen la diagonal con ayuda del teorema de los cosenos. 72. $\arccos\frac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(n^2+m^2)}$ y $\pi-\arccos\frac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(n^2+m^2)}$. Designen los lados del paralelogramo con px, qx y las diagonales, con my, ny; hagan uso de la fórmula que liga los lados y las diagonales del paralelogramo, después apliquen el teorema de los cosenos para expresar una de las diagonales con los lados. 73. $3\arccos\frac{2+k}{2k}$ y $\pi-3\arccos\frac{2+k}{2k}$ si $k>2$; no hay soluciones si $k\leqslant 2$. Sea $BC=a$, $AB=b$, $AC=d$ (fig. 165). Tracen la bisectriz CK en el $\triangle ADC$. Del $\triangle ACK$ isósceles expresen AK y CK con α y $\angle ACK=x$. De la semejanza de los $\triangle ABC$ y $\triangle CKD$ deduzcan la dependencia $\frac{a}{b}=2\cos x$. Aplicando al triángulo ACD el teorema de la bisectriz, deduzcan la dependencia $d=2a\cos x-b$. Añadiendo a las relaciones obtenidas la condición del problema $d=\frac{2}{k}(a+b)$, excluyan de las igualdades a, b y d y obtengan la relación $\cos x=\frac{k+2}{2k}$. 78. 15 cm. 79. 16 cm. 80. 2 cm. 81. $\frac{ac}{a+b}$, $\frac{ab}{a+b}$ y $\frac{bc}{a+b}$. 82. 14; 12,5; 29,4 y 16,9 cm. 83. $h\operatorname{ctg}\alpha$. 84. 1,5. 85. $\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2+\cos\alpha}\right)$. 86. $\frac{b^2+ab-c^2}{b}$. 87. Del triángulo regular AOD establezcan que $KD\perp AC$ y, entonces, $KP=0{,}5\,CD$. Hagan una conclusión análoga para MP. 88. $AC^2=AD^2+CD^2-2\,AD\cdot CD\cdot\cos D$, $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos A$ (fig. 166). Sumen estas igualdades y, expresando AK y MD con AB, CD y los ángulos A y D, tengan en cuenta que $MD+AK=AD-BC$. 89. Por el punto M de intersección de las diagonales del trapecio tracen la recta $EF\parallel AD\parallel BC$ (fig. 167). De las razones $\frac{BE}{AB}=\frac{EM}{AD}=\frac{CF}{CD}=\frac{MF}{AD}$ establezcan que $EM=MF$. 90. $\frac{2ab}{a+b}$. Véase la indicación al anterior problema. 91. 40 cm. Demuestren que los ángulos AKB y CED son rectos y que la línea media del trapecio yace en KE (véase el problema 76). 92. $\frac{49\sqrt{2}}{2}$ cm. El segmento OK se halla del triángulo rectángulo OCD. En el triángulo OAB tracen $OP\perp AP$ y, después de considerar los ángulos formados demuestren que $OM=AM$ y $OM=BM$. 96. $\frac{4ab}{a+b}$. 97. 9; $9\sqrt{3}$ y 18 cm. 98. $\frac{5}{4}\times\sqrt{m^2+n^2}$; $\frac{5}{6}\sqrt{m^2+n^2}$. 99. $4\sqrt{2}$ y 18 cm. 100. $\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 101. $2\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$. 102. Hagan uso de que $PKLM$ es un paralelogramo (los puntos P, K, L, M son los puntos medios de los lados consecutivos y, además, de que $PELF$ es un paralelogramo (E y F son los puntos medios de las diagonales). 103. Empleen los razonamientos en la solución del anterior problema. 104. Supongan lo contrario, que uno de los ángulos entre las diagonales es agudo y el otro, obtuso y hagan uso del teorema 9 en el § 1. 105. Tracen la diagonal y demuestren que su punto medio yace en el segmento prefijado. 106. $2a\sqrt{7}$. 107. 150°, 90°. 108. $\operatorname{arctg}\frac{11}{3}$. Calculen las tangentes de los ángulos BAO, OAD, ODA y ODC y con su ayuda hallen la tangente del ángulo M. 109. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

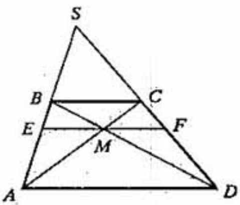


Fig. 167

Introduzcan las designaciones: $AB=2x$, $BC=3x$, $BD=4\sqrt{2x}$. Del triángulo ABD expresen AD con x según el teorema de los cosenos; establezcan que

$\angle BAD$ es obtuso, hallen este ángulo de acuerdo con el teorema de los senos. **110.** $\frac{m^2+m+1}{(m+1)^2}$. Designen: $\angle BAE=\alpha$, $\angle KAD=\beta$, $\angle EAK=x$, $AD=a$, $AB=ma$. Expresen con a y m los segmentos BE y KD, a continuación, $\operatorname{tg}\alpha$ $\operatorname{tg}\beta$ y hagan uso de que $\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$. **115.** 36°, 60°, 108° y 156°. **116.** 24 cm. **117.** $\frac{a}{6}(3\pm\sqrt{3})$. **118.** $2\sqrt{Rr}$. **119.** $\frac{\sqrt{14R-R^2-r^2}}{2\sqrt{3}}$. **120.** $14\pi+12\sqrt{3}$. **121.** 30 cm. **122.** $\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$. **123.** $\frac{2a\operatorname{sen}\alpha\cos(\beta-\alpha)}{\operatorname{sen}\beta}$ si $\alpha<\beta$. **124.** Hagan uso de la semejanza de los triángulos ABC y ABD. **125.** Tracen la cuerda $AP\parallel CD$ y empleen el que $AC=PD$. **126.** Designen

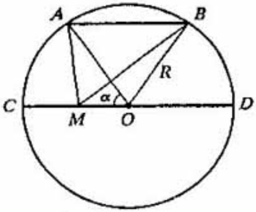


Fig. 168

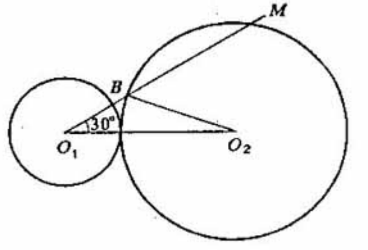


Fig. 169

$OA=OB=R$, $\angle AOM=\alpha$ (fig. 168) y expresen con ayuda del teorema de los cosenos AM del triángulo OAM y BM del triángulo BOM. **127.** $\frac{20}{3}$ y $\frac{15}{4}$ cm. Demuestren que $\angle BAC=90°$. Tracen una tangente interior común. **128.** $\frac{R}{4}(8-3\sqrt{3}-\sqrt{7})$, $\frac{R}{4}(3\sqrt{3}-\sqrt{7}-2)$. Hagan $O_1B=x$ y apliquen al triángulo O_2O_1B el teorema de los cosenos para O_2B (fig. 169). **129.** $2\sqrt{b^2((b-a)\cos\alpha-a)^2}$. Designen $O_2K=x$ (fig. 170). Tracen $O_2P\parallel AB$ y del triángulo O_2O_1P, en el que $\angle O_2O_1P=\alpha$, expresen x con a, b y α. **135.** 36°, 36° y 108°. **136.** $\frac{2a(\sqrt{a^2+h^2}-a)^2}{h^2}$. **137.** 36 y 48 cm. **138.** 12π cm. **139.** $3\sqrt{5}$ cm. **140.** $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. **141.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}{2\operatorname{sen}\gamma}$. **142.** $b\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. **143.** Si $k\leqslant 2$, $\arccos\frac{1-\sqrt{1-2k}}{2}$, $\arccos\frac{1-\sqrt{1-2k}}{2}$ y $\pi-2\arccos\frac{1-\sqrt{1-2k}}{2}$. **144.** Empleando las fórmulas $r=\frac{a+b-c}{2}$, $h=\frac{ab}{c}$, transformen la fracción $\frac{r}{h}$ a la forma $\frac{\operatorname{sen}A+\cos A-1}{\operatorname{sen}2A}$. Más adelante, hagan uso de que $\operatorname{sen}2A=\sqrt{(\operatorname{sen}A+\cos A)^2-1}$. **145.** Demuestren que el ortocentro es simétrico a cierto punto de la circunferencia con relación al lado del triángulo. **146.** Construyan en AM el punto K de forma que $MK=BM$ y demuestren que los triángulos ABK y BMC son iguales. **147.** Empleen la afirmación del problema anterior. **148.** Designen el radio de la circuferencia con R, $\angle ACK = \alpha$ y $\angle KCB = \beta$. De acuerdo con el teorema de los cosenos expresen AK, KC, AB y KB con R, α y β. 149. Hallen la relación entre las fracciones en el primer miembro de la igualdad y las cotangentes de los ángulos del triángulo. 150. Sea la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, el punto M se ha tomado en el arco AB, $MK \perp AC$, $MF \perp AB$ y $MD \perp BC$. Haciendo uso de que a los cuadriláteros $MAKF$ y $MFBD$ se pueden circunscribir circunferencias, demuestren que $\angle AFK = \angle DFB$. 151. Circunscriban una circunferencia al triángulo ABC y continúen la bisectriz CD hasta su intersección con la circunferencia en el punto P. Empleen la semejanza de los triángulos BCD

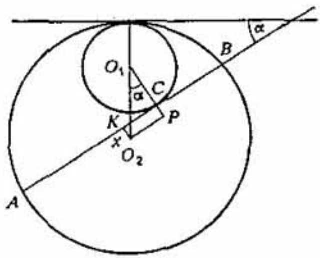


Fig. 170

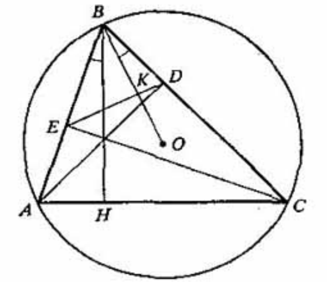


Fig. 171

y ACP y, además, el que $BD \cdot AD = CD \cdot DP$. 152. Demuestren que $\angle ABH = \angle OBC$ (fig. 171). A continuación, hagan uso de la semejanza de los triánlos ABC y BDE (D y E son las bases de las alturas) y la semejanza de los triángulos BHA y BDK. 153. $(3 + \sqrt{3})$ cm. Empleen el hecho de que $CD \cdot AD = BD^2$ y apliquen el teorema de los cosenos al triángulo BAD.

154. $\frac{3R\sqrt{57}}{19}$. 155. 120°. 156. $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{k^2+6k+1}-k-1}{2}$; $\pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{k^2+6k+1}-k-1}{2}$. 157. $\arccos \frac{2}{3}$. 159. 12 cm. 1 60. $\frac{ac}{a+c}$. 161. $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$ y 6 cm. 162. $\sqrt{a^2+ab+b^2}$. 1 6 . 2 cm. 164. $2\sqrt{6}$ cm. 165. 2 y 3 cm. 166. 30°, 30° y 120°. 167. $a(\pi-\beta-\gamma)\cdot \frac{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)}$. 169. 30°, 30° y 120°; $\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm. 170. $35\frac{35}{47}$ cm. Determinen el tipo del triángulo. 171. $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. Sea M el centroide, CM y DE se intersecan en el punto P. Hagan uso de que $MP \cdot PC = PE \cdot DP$. 172. $a^2 + b^2 = 2c^2$. Empleen el resultado del anterior problema y hagan uso de la fórmula para calcular la mediana m_c con ayuda del lado del triángulo. 173. 2 y 4 cm. Hagan uso de que el perímetro del triángulo BDE no depende del la elección del punto de tangencia y apliquen el teorema de los cosenos al triángulo BDE. 174. $8\frac{1}{8}$ cm. Demuestren que los triángulos DEC y ABC son semejantes, entonces, $DE = EC = 15$ cm. Hagan uso de que el centro de la circunferencia yace en el punto de intersección de AD con la perpendicular trazada a DE por su punto medio

y, además de que sen $A=\frac{12}{13}$. 175. $\beta\cdot b\cdot\text{ctg}\,\beta$. Hagan uso de que el diámetro de la circunferencia es el segmento BH (H es el ortocentro) y de que $BH = 20\ K$ (véase el ejemplo 8 del § 2), donde el punto O es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y OK, la perpendicular del punto O a AC.
177. $10\frac{5}{8}$ cm. 178. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos^2\alpha}}{2\,\text{sen}\,2\alpha}$. 179. $\dfrac{8R}{5}$. 180. $2\cos^2\dfrac{\alpha}{4}$.

181. $\arccos\dfrac{k-1}{k}$, $\pi-\arccos\dfrac{k-1}{k}$ si $k\geqslant 1$. 182. $\dfrac{4\,\text{sen}\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\pi\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}$.

183. a) Supongamos que una de las diagonales forma con los lados los ángulos α, β, γ y δ. Expresen a, b y c, m, d_1 y d_2 con el radio de la circunferencia y los ángulos, α, β, γ y δ según el teorema de los senos. 184. Sea que las alturas BD, AF y CE se cortan en el punto H. Habiendo circunscrito una circunferencia al cuadrilátero $AEHD$, demuestren que $AC\cdot CD=CE\times\times CH=ab\cos C$. Por analogía, demuestren que $BD\cdot BH=ac\cos B$, $AF\cdot AH=bc\cos A$ y, a continuación, apliquen el teorema de los cosenos a cada uno de los lados a, b y c. 185. 15 y 20 cm. Circunscriban una circunferencia al triángulo dado. 186. 17 cm. Apliquen el teorema de Pitágoras al triángulo OKM (fig. 172). 187. 2 y 2 cm. Hagan uso de que el perímetro del triángulo APQ no depende de la elección del punto de tangencia y apliquen el teorema de los cosenos al triángulo APQ.

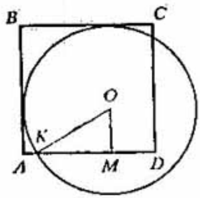


Fig. 172

188. $\arcsin\dfrac{1}{k}\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}$ si $k\geqslant\sqrt{2}$. Designen el radio de la circunferencia inscrita con r, el ángudo del trapecio con x. Expresen con r y x los lados del trapecio, la diagonal y, a continuación, el radio de la circunferencia inscrita, 189. $2\sqrt{4\,\text{tg}^2\alpha+3}$. Demuestren que EM es la mediana del triángulo CED y, por ello, $EM=\frac{1}{2}CD$. 190. $\dfrac{30\,\text{tg}\,\alpha}{\sqrt{25+36\,\text{tg}^2\alpha}}$. Demuestren que $EH\perp\perp AB$. 191. $\sqrt{\dfrac{65}{2}}$. Demuestren que sen $\angle(A+B)<0$. Esto quiere decir que las rectas AD y BC se cortan en el punto K que yace a la izquierda de AB (fig. 173), en tanto que la circunferencia de la que hablamos está inscrita en el triángulo KCD. Hallen los ángulos del triángulo ODC. 193. $12\sqrt{5}$ cm.
194. $2\frac{46}{49}$ cm. 195. $\sqrt{10}$ cm. 196. $\dfrac{R}{2}(\sqrt{7}-1)$. 197. $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}$.

198. $\dfrac{R\,\text{sen}\,\dfrac{\alpha}{2}}{\text{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)}$. 199. $\dfrac{2}{5}R\sqrt{4+\text{sen}^2\alpha}-\dfrac{4}{5}R\cos\alpha$.

200. $\dfrac{4R\sqrt{3}\,\text{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}}{3}$. 201. $\dfrac{R}{2}(\sqrt{3}\cos\alpha+\sqrt{3+\text{sen}^2\alpha})$. 202. $\dfrac{2a\sqrt{ab}}{b}$.
203. 3 cm. 204. $\dfrac{b}{2}\text{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}$. 205. $4R\,\text{sen}^2\dfrac{\alpha}{8}\cos\dfrac{\alpha}{4}$. 206. $0{,}6\ a$.
207. $\dfrac{6-4\sqrt{2}}{3}$ cm. 208. $\dfrac{a\sqrt{3}+r-\sqrt{4r^2+2ar\sqrt{3}}}{3}$, $r\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. 209. $\dfrac{b}{2}\times$

$\times \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. 210. $\dfrac{b}{4\operatorname{sen}\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. 211. $4R\cos\frac{\alpha}{4}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{8}$.

212. Sea que las circunferencias circunscritas a los triángulos ADM y BDK se intersecan en el punto P. Haciendo uso de que $\angle DAM+\angle DPM=180°$

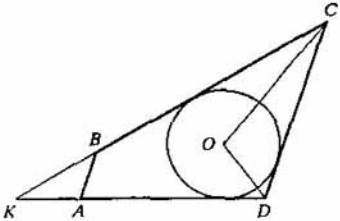


Fig. 173

y $\angle DBK+\angle DPK=180°$ demuestren que $\angle MCK+\angle MPK=180°$. 213. 120°. Expresen el radio de la circunferencia inscrita, que es el elemento de referencia, con los elementos lineales conocidos y $\angle AOB=2x$ de dos triángulos: O_1PH y O_1MB, donde P es el punto medio de KH, M, el punto medio de AB. 214. $R\left(\sqrt{1-\frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$ si $\alpha\geqslant\frac{\pi}{3}$. Expresen OC con R y α

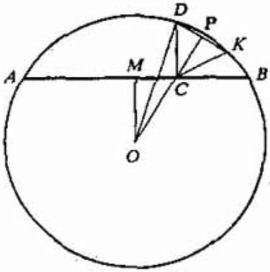


Fig. 174

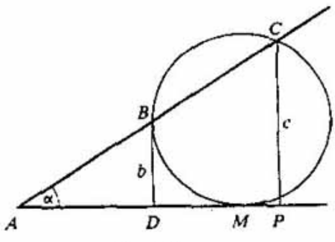


Fig. 175

y apliquen el teorema de los cosenos al triángulo ODC (fig. 174) en el que $OD=R$, $CD=x$, $\angle OCD=150°$. 215. $2r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$. Apliquen el teorema de los cosenos al triángulo AOO_1, donde los puntos O y O_1 son los centros de las circunferencias. 216. $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\sqrt{r^2+\operatorname{arcsen}\alpha}-r-a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$.
Véanse las indicaciones al anterior problema.

217. $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\left(b\cos\frac{\alpha}{2}-\sqrt{4r^2-b^2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}-2r\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. Hallen el coseno del ángulo OAO_1 y apliquen el teorema de los cosenos al triángulo OAO_1 (los puntos O y O_1 son los centros de las circunferencias). 218. $\dfrac{b+c-2\sqrt{bc}\cos\alpha}{2\operatorname{sen}^2\alpha}$. Hagan uso de que $AM^2=AC\cdot AB$ (fig. 175) y de que $AM=AD+DM$. 219. $DE=\dfrac{b^2-a^2}{b}$, $R=\dfrac{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}{2b\operatorname{sen}\alpha}$. Hagan uso de que $OC^2=OD\cdot OE$. Apliquen los teoremas de los senos y cosenos a los triángulos OEC, ODC y CED. 223. 360 cm². 224. a) 9 cm²; b) 3 cm²; c) 12 cm². 225. 4 cm². 226. $\dfrac{a^2}{2}(3+2\sqrt{2})$. 227. $\dfrac{180\sqrt{3}}{19}$. 228. $\dfrac{1}{4}c^2(q^2-1)$ si $1<q\leqslant\sqrt{2}$. 229. $m^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. 230. $m\operatorname{sen}\beta\,(\sqrt{c^2-m^2\operatorname{sen}^2\beta}+m\cos\beta)$.

231. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}$. 232. $\dfrac{2\sqrt{3}\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$. 233. a) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{|\alpha-\gamma|}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}$;

b) $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha-\gamma)}{2\operatorname{sen}(\alpha+\gamma)}$; c) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{|\alpha-\gamma|}{2}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\alpha+\gamma)}$. 234. $\dfrac{l(a+b)}{4ab}\times$ $\times\sqrt{4a^2b^2-l^2(a+b)^2}$. 235. $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. 236. Expresen los lados del triángulo con R y los ángulos A, B y C (según el teorema de los senos) y demuestren que $\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C\leqslant\dfrac{3}{4}$. 237. $ab\sqrt{3}$. Expresen el área del triángulo con dos procedimientos: con la fórmula de Heron y con $S=pr$. 238. $(\sqrt{S_1}+$ $+\sqrt{S_2})^2$. Introduzcan las designaciones: $BQ=x$, $CQ=y$ y hagan uso de que $\dfrac{S_{ABC}}{S_2}=\left(\dfrac{x+y}{y}\right)^2$ y $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{x^2}{y^2}$. 239. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$. Véanse las indicaciones al anterior problema. 240. $\dfrac{720}{17}$. Determinen el tipo del triángulo. 241. 200 cm². Sean AK y CM las perpendilulares a la tangente, BD la altura del triángulo ABC. De la semejanza de los triángulos ABD y BMC establezcan que $\dfrac{BD}{16}=\dfrac{AB}{BC}$ y de la semejanza de los triángulos AKB y BDC, que $\dfrac{BD}{25}=\dfrac{BC}{AB}$. 242. $\dfrac{abc}{mkc+nkb+mna}$. Haciendo uso de que $S_{DEF}=S_{MDE}+$ $+S_{MEF}+S_{MDF}$, expresen S_{DEF} con m, n y k y los senos de los ángulos del triángulo ABC. A continuación, los senos de los ángulos del triángulo ABC sean expresados con su área y sus lados. 243. $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Haciendo uso de que los triángulos ABC y BFD con semejantes (véase el ejemplo 11, § 3), establezcan que $FD=b\cos\beta$; por analogía, $DE=c\cos\gamma$. Habiendo hecho uso de que $\angle ABE=\angle FDA=\angle ADE=\angle FCA$ (véase el ejemplo 3 del § 1), expresen el ángulo FDE con ayuda del ángulo BAC.

244. $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. Introduzcan las designaciones $AC=b$, $BC=a$. Aplicando el

teorema de los cosenos a los triángulos ABC, ACD, BCD obtenemos el sistema: $\begin{cases} 2a^2+b^2=12, \\ a^2+b^2+ab=9. \end{cases}$ **245.** $3\sqrt{2}$. Véanse las indicaciones al anterior problema. **246.** $\frac{27}{65}$ cm^2. Véase el ejemplo 5 del § 4. **247.** 210 cm^2. Sean $OP \perp AC$ ($OP=10$ cm), BH, la altura del triángulo ABC y $OK \perp BH$. Del triángulo BHD hallen $BH=20$ cm. Entonces, en el triángulo OBK $BK=10$ cm, $\angle OBK = \angle BDH$; de este triángulo hallen el radio de la circunferencia y, a continuación, AP, AC y, según la fórmula $CD \cdot AD = BD^2$ hallen CD. **249.** $\frac{(a-b)^2 \operatorname{sen} \alpha}{2}$. **250.** a^2. **251.** 135 cm^2. **252.** 48 cm^2. **253.** $\frac{5R^2\sqrt{3}}{4}$. **254.** 147 cm^2. **255.** 126 cm^2. **256.** 1476 cm^2. **257.** 336 cm^2. **258.** 168 cm^2. **259.** $25\sqrt{3}$ cm^2. **260.** 150 cm^2. **261.** $\frac{1}{2}(a^2-b^2)\operatorname{tg}\alpha$. **262.** $2R^2 \operatorname{sen} 2\alpha \times \times \operatorname{sen}^2 \alpha$. **263.** $\dfrac{4 \operatorname{sen} \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\pi \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}$. **264.** $\frac{H^2}{2} \operatorname{sen} \beta \cdot \cos(\alpha-\gamma)$. **265.** Tracen la altura BH y hagan coincidir el punto M con el punto H. **266.** $(a+b)^2$. Demuestren que $S_{AOB}=S_{COD}$ y hagan uso de que $\frac{S_{BOC}}{S_{COD}}=\frac{BO}{OD}=\frac{b}{a}$. **267.** 20 cm^2. Las rectas dividen el rombo en 9 partes de las cuales 4 son triángulos. Designen el área del triángulo pequeño con x, muestren que el área del cuadrilátero, adyacente al lado, es igual a $3x$ y expresen el área del triángulo ABN con el área del rombo. **268.** $\frac{8ab\sqrt{ab}}{a+b}$. Véase el ejemplo 7 del § 3. **269.** 70 cm^2. Hagan uso de que $\frac{S_{AOD}}{S_{COD}}=\frac{AO}{OC}$. **270.** 40 cm^2. Designen $KD = x$, P, M son los puntos de tangencia de la circunferencia con AD y AB. Haciendo uso de que $PD^2=CD \cdot KD$, expresen con x los segmentos PD, OP y MK. **271.** 20; 10,4. Introduzcan las designaciones: $AB=x$, $BC=2x$, $\angle ABM=\alpha$. Apliquen el teorema de los cosenos para AM (en el triángulo ABM) y CM (en el triángulo BMC) y, a continuación, hagan uso de la fórmula $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. **272.** $4S+2c^2$. **273.** 926 cm^2. **274.** $2a^2(\sqrt{2}-1)$. **275.** $\frac{3}{2}a^2$. **276.** $289(\sqrt{3}+1)$ cm^2. **277.** $\frac{R^2}{4}(8\sqrt{3}-9)$. **278.** $\frac{37}{64}$. **279.** 11 cm^2. Introduzcan las designaciones: $BF=x$, $AF=2x$, $BK=y$, $CK=3y$ y comparen las áreas de los triángulos BKF y ABC. **280.** $\frac{784}{7225}$. **281.** $\frac{a^2}{24}(3\sqrt{3}-\pi)$. **282.** $\frac{5\sqrt{3}\pi-18}{54}$. **283.** a) $(a+b)\sqrt{ab}-\frac{\pi b^2}{2}-\frac{1}{2}\times \times(a^2-b^2)\arccos\frac{a-b}{a+b}$; b) $\frac{\pi a^2b^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4}$. **284.** $\frac{a^2}{18}(3\sqrt{3}-\pi)$. **285.** $\frac{a^2}{2}(\pi-2)$. **286.** a) $\frac{R^2}{6}(7-4\sqrt{3})(2\sqrt{3}-\pi)$; b) $R^2(3-2\sqrt{2})(4-\pi)$; c) $\frac{2R^2}{9}\times \times(3\sqrt{3}-\pi)$. **287.** $R^2(\alpha+\operatorname{sen}\alpha)$. **288.** $\frac{\pi a^2}{6}$. **289.** $10R^2\left(\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$. **290.** $\frac{\pi a^2}{18}(2-\sqrt{3})$. **291.** $\frac{(4\pi-3\sqrt{3})(4+\sqrt{7})}{27}$. **292.** Demuestren que $CD^2=AC \cdot BC$. **293.** $\frac{b^2}{4}\operatorname{ctg}\beta(\beta-\operatorname{sen}\beta\cos(2\alpha+\beta))$. Hagan uso de que la circunferencia pasa por el punto C. 294. $\frac{na^2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\left(\operatorname{ctg}\alpha+\pi-\frac{\pi n}{2}\right)$, donde $\alpha=\frac{\pi}{n}$. La "estrella" es la diferencia entre el n-gono, con los vértices en los centros de los círculos, y los n sectores. 295. $\frac{na^2\cos^2\alpha}{4(1+\operatorname{sen}\alpha)^2}\left(\operatorname{ctg}\alpha+\pi-\frac{\pi n}{2}\right)$, donde $\alpha=\frac{\pi}{n}$. Véase la indicación para el anterior problema.

301. 75 cm. 302. $2\sqrt{\frac{S}{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. 303. a) $\frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$; b) $\frac{ab\operatorname{sen}\gamma}{c}$. 304. $\sqrt{\frac{a^2\operatorname{sen}\alpha+2ah\cos\alpha+2ah}{\operatorname{sen}\alpha}}$. 305. $\sqrt{\frac{2}{4-\pi}}$. 306. $\operatorname{arctg}\frac{a^2-b^2}{4S}$. 307. $\frac{\sqrt{2S\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}}{\operatorname{sen}\alpha}$. 308. 120°, $\sqrt{3}$ cm. 309. $\frac{7\sqrt{145}}{5}$ cm. 310. Introduzcan las designaciones: $b=a+d$, $c=a+2d$, expresen el área S con a y d según la fórmula de Heron y, a continuación, hagan uso de las fórmulas $R=\frac{abc}{4S}$, $r=\frac{S}{p}$. 311. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Sea que la altura del trapecio se divide con el segmento x, sobre el que se habla en el problema, en las partes h y kh $(k>1)$. Entonces $\frac{b+x}{2}kh=\frac{1}{2}\frac{a+b}{2}(k+1)h$ y $\frac{x-b}{a-b}=\frac{k}{k+1}$. De este sistema hallen x. 312. 14,4 cm. Hagan uso de la semejanza de los triángulos AKD y CKM, donde K es el punto de intersección de AM y CD. 313. 4,5 cm. Véase el ejemplo 11 del § 3. 314. 24 cm. Véase el ejemplo 11 del § 3. 315. 4 cm. Véase el ejemplo 4 del § 4. 316. $\frac{2\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2-S_2^2}}$. Introduzcan las designaciones: $AC=x$, $AB=y$. Expresen con x e y el área del triángulo ABC. Demuestren que $\frac{y}{x}=\frac{S_1}{S_2}$. 317. 8,25 cm. Hallen el radio de la circunferencia circunscrita y hagan uso de la afirmación en el ejemplo 8 del § 2. 318. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, $\frac{26}{3}\sqrt{3}$ y $10\sqrt{3}$ cm. Demuestren que $a:b:c=4:13:15$ e introduzcan las designaciones: $a=4x$, $b=13x$, $c=15x$. 319. $\frac{2\cos\frac{\gamma}{3}+3}{1+6\cos\frac{\gamma}{3}}$. Introduzcan el parámetro auxiliar $AC=b$, entonces $BC=3b$. Hagan uso del método de áreas: $S_{ACD}+S_{DCB}=S_{ACK}+R_{KCB}$. 320. $\frac{\sqrt{7}}{9}(4+\sqrt{7})$. Véase el ejemplo 13 del § 4. 321. $\frac{33+12\sqrt{6}}{25}$. Véase el ejemplo 13 del § 4. 323. Los triángulos $A_1B_1C_1$ y PQR son simétricos con relación al punto M. 324. Analicen la simetría con respecto al punto medio de aquel lado, cuya longitud es incógnita, entonces el triángulo, en el que las longitudes de los lados son iguales a a, b y $2m$, puede ser construido; $\frac{a-b}{2}<m<\frac{a+b}{2}$, donde m es la longitud de la mediana. 325. Establezcan que el punto de intersección de las

medianas del triángulo es el centro de simetría que traspasa el triángulo ABC a triángulo construido. **326**. Consideren la simetría con relación al punto P. **327**. Hagan uso de que el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo es su centro de simetría. **328**. Tracen una recta por el centro de simetría del paralelogramo. **329**. Hagan uso de que el centro de la circunferencia es asimismo su centro de simetría y con la simetría central, las correspondientes rectas son paralelas. **330**. El centro de la circunferencia es también el centro de simetría del hexágono. **331**. Establezcan que el punto O de intersección de las diagonales AD y BE es el centro de simetría del hexágono $ABCDEF$. Después, $S_{\Delta\ COA} = S_{\Delta\ OAF}$, $S_{\Delta\ COE} = S_{\Delta\ OEF}$, $S_{\Delta\ EOA} = S_{\Delta\ ODE}$. Sumando estas igualdades, término por término, obtenemos: $S_{\Delta\ ACE} = \frac{1}{2} S_{ABCDEF}$.

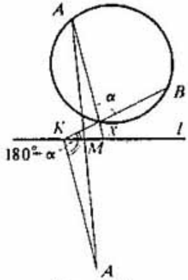


Fig. 176

332. Sea el punto A' simétrico al punto A con relación al punto M (fig. 176). Entonces, el ángulo BKA' es conocido (K es el punto de intersección de la recta BX con la recta l). De aquí se desprende la construcción: en el segmento $A'B$, donde $A' = Z_M(A)$, construyan el segmento que contiene el ángulo igual a $180° - \alpha$, K es el punto de intersección del arco del segmento l. El problema tiene dos soluciones. **333**. La recta m buscada pasa por los puntos simétricos con relación al punto M y que pertenecen a los lados del ángulo ABC. Para demostrar este hecho establezcan que el área del triángulo cortado por cierta recta l, que contiene el punto M y distinta de la recta m, es mayor que el área del triángulo cortado por la recta m. **334**. Hagan uso de la simetría, cuyo centro coincide con el centro de la circunferencia. **335**. El punto medio del lado BC, es decir, el punto M, es el centro de simetría del paralelogramo $BXCY$ (fig. 177). Por ello, la transformación que traspasa x a y, es una simetría con relación al centro M o bien, lo que es lo mismo, la homotecia H_1 con centro en M y con la razón $k_1 = -1$. Como $\overline{XY} = \overline{AZ}$, $\overline{AZ} = 2\,\overline{MY}$. Por lo tanto, la transformación que traspasa Y a Z es la homotecia H_2 con centro S en el punto de intersección de las rectas ZY y AM y con la razón $k_2 = 2$. La composición de estas homotecias $H_2 \circ H_1$ es cierta homotecia H con la razón $k = k_1 \cdot k_2 = -2$. Hallemos el centro O. Como $H_1(M) = M$, $H(M) = H_2(M) \circ H_1(M) = H_2(M) = A$. De modo que $\overline{OA} = -2\,\overline{OM}$. Esto quiere decir que O es el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC. Así, pues, la transformación $x \to z$ es una homotecia con centro en el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC con la razón $k = -2$. **336**. a) Sea $ABCD$ el paralelogramo buscado inscrito en el cuadrilátero dado $LMNK$, el punto O es el centro de simetría del paralelogramo, los puntos B y D pertenecen, respectivamente, a MN y KL (fig. 178). Es evidente que A es el punto de intersección de OML y la imagen de ML con la simetría con relación al centro O, en tanto que C es la intersección de MK y la imagen de ML con la simetría con centro O.

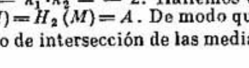


Fig. 177

Sea que el punto A pertenece a LM y B, a MN. Como $T_{\overline{AB}}(A) = B$ y $T_{\overline{AB}}(D) = C$, C es el punto de intersección de KM y la imagen de ML. OBSERVACIÓN. En este problema se supone que los vértices del paralelogramo buscado pueden pertenecer a los lados del cuadrilátero o a sus continuaciones. **337**. Designemos: $BC = a$, $AC = b$ y, entonces, según el planteamiento, $a > b$. Detengámonos en dos procedimentos para resolver el problema. *I procedimiento*. Construyamos el punto D simétricamente al punto C con relación al punto medio M del lado AB y unamos el punto D con el vértice A (fig. 179). El triángulo ADM construido es simétrico al $\triangle BCM$ con relación al punto M, por lo que $AD = BC = a$ y $\angle BCM = \angle ADM = \beta$. Obtenemos el triángulo ACD que contiene los ángulos α y β que nos interesan, con la particularidad de que los lados AD y AC, opuestos a ellos, son iguales a a y b, respectivamente. De acuerdo con el planteamiento $a > b$, por lo que $\alpha > \beta$. *II procedimiento*. Unan el punto medio E del lado AC con el punto M. Se forma el triángulo CEM con los lados $EM = \frac{a}{2}$, $CE = \frac{b}{2}$. Los ángulos del triángulo CEM, opuestos a dichos lados, son iguales a α y β, respectivamente. Esto se demuestra con facilidad empleando la propiedad de la línea media de un triángulo. 338. a) Tomen un vértice en el eje de simetría, otros dos no en el eje y construyan los simétricos a ellos; b) el pentágono que tiene dos ejes de simetría es regular. 339. Hagan uso de la simetría axial que traspasa una recta a la otra. 340. Construyan la imagen del lado menor con la simetría respecto de la bisectriz del ángulo opuesto al lado dado. 341. Después de aplicar la simetría con relación a la perpendicular media, trazada al tercer lado, el problema se reduce a la construcción de un triángulo conociendo dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. 343. Véase la fig. 180. 344. La demostración se puede realizar partiendo de lo contrario. Si la recta en la que yace la diagonal del pentágono es su eje de simetría, en él yacen dos y sólo dos vértices del polígono (ya que el pentágono es convexo). Los tres vértices restantes deben distribuirse en igual número por cada uno de los semiplanos con límite l. Pero, para tres vértices esto es imposible. Esto significa que tal pentágono no existe. 345. La solución es análoga a la del problema anterior. 346. Construyan un triángulo auxiliar de acuerdo con los dos lados conocidos y el ángulo entre ellos, a continuación, hagan uso de la simetría con relación a la perpendicular media al tercer lado. El ángulo se toma bien el dado o bien el adyacente a él. 347. Véase la indicación al problema 346. 348. a) Construyan cualquier diámetro de una circunferencia y el diámetro perpendicular al primero de la otra circunferencia; b) continúen el diámetro AB de la circunferencia menor hasta su intersección con la circunferencia mayor en el punto C. Construyan los ejes de simetría de los segmentos AC y BC. 349. La composición de las simetrías axiales $S_r \circ S_q \circ S_p$ es una simetría con el eje l y $S_r \circ S_q \circ S_p \times \times (A) = A$, por lo tanto, $S_l(A) = A$, es decir, A pertenece a l. Construyan la recta l tomando en consideración que $\angle(p, q) = \angle(l, r)$. Cualquier punto de la recta l puede servir de vértice A. 350. Tracen por el centro de la circunferencia tres rectas perpendiculares a las dadas. Hagan uso del resultado del problema 349. 351. Supongamos que la recta DH corta la recta CO en el punto H'

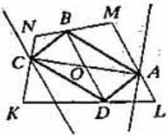


Fig. 178

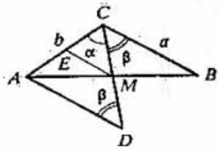


Fig. 179

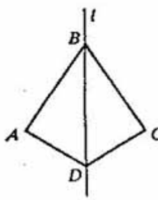


Fig. 180

y que C' es diametralmente opuesto a C (fig. 181). Los rayos CH y CO son simétricos con relación a CM, por consiguiente, $CD : CM = CH' : CC' = CH : CC' = 2R \cos C : 2R = \cos C$. 352. Si $OM = p$, $ON = q$, $OP = r$, $OQ = l$, $\sigma = S_l \circ S_r \circ S_q \circ S_p$ es un movimiento idéntico, ya que $\sigma(0) = 0$, $\sigma(A) = A$. Por lo tanto, $S_q \circ S_p = S_r \circ S_l$ o bien $\angle(p, q) = \angle(l, r)$. 353. Consideren la composición $\delta = S_l \circ S_r \circ S_q \circ S_p$, donde p, q, r y l son rectas que contienen las bisectrices de los ángulos de los cuadriláteros. Como $\delta(AD) = AD$, $\delta(0) = 0$, δ es una transformación idéntica y $S_q \circ S_p = S_r \circ S_l$; esto quiere decir que $\angle(p, q) = \angle(l, r)$. De este modo, $\angle COD + \angle AOB = 180°$ (fig. 182). 356. Designemos las bases del trapecio con BC y AD, el eje de simetría con l. Entonces, $S_l(A) = D$, $S_l(B) = C$, $S_l(AB) = DC$. Esto significa que $S_p(AB) = DC$, $S_l(AC) = DB$. Pero el punto de intersección de la recta y de su imagen con la simetría axial pertenecen al eje. Por ello, el punto de

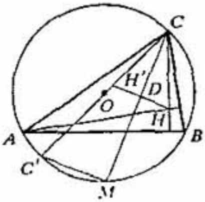


Fig. 181

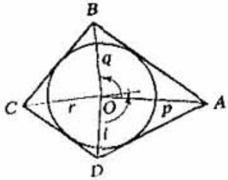


Fig. 182

intersección de las rectas AB y DC pertenece a l y el punto de intersección de los segmentos BC y AC pertenece asimismo a l. 357. Sea el punto O el centro de una circunferencia, AB y CD, cuerdas paralelas de dicha circunferencia, M, el punto medio de la cuerda AB, N el punto medio de la cuerda CD. Como $AO = OB$ y $AM = MB$, OM es el eje de simetría de los puntos A y B, de donde se desprende que $OM \perp AB$. Por analogía, ON es el eje de simetría de los puntos C y D y $ON \perp CD$. Teniendo en cuenta que $AB \parallel CD$, obtenemos: $OM \parallel ON$ y, por ello, $OM = ON$. 358. Sea O el centro de la circunferencia F_1 y O_1, él de las circunferencias F_2 y F_3. Las circunferencias F_1 y F_2 se intersecan en los puntos A y B, en tanto que F_1 y F_3, en los puntos C y D. Entonces, OO_1 es el eje de simetría de la figura constituida por la intersección de las circunferencias F_1, F_2 y F_3. 359. Sea M el punto común de las circunferencias dadas ω_1, ω_2, ω_3. A, B C con los segundos puntos de intersección ω_2 y ω_3, ω_3 y ω_1. ω_1 y ω_2. Analicemos la composición de tres simetrías axiales S_{MA}, S_{MB}, S_{MC} que es una simetría con eje MO_2, donde O_2 es el centro de la circunferencia ω_2. Si el punto P es diametralmente opuesto al punto M en ω_2, en tal caso $S_{MA}(P) = Q$, $S_{MB}(Q) = R$, $S_{MC}(R) = P$, con la particularidad de que $PA = AQ$, $QB = BR$, $RC = CP$. Por consiguiente, AB, BC, CA son las líneas medias en el triángulo PQR y, por esta razón, la circunferencia circunscrita al triángulo ABC tiene el mismo radio que la circunferencia circunscrita al triángulo QAB. 360. Véase la solución del problema 359. 361. Sea A el punto dado, l, la recta dada y $AO \perp l$. Es fácil advertir que el lugar geométrico F buscado es simétrico con relación a la recta AO y, por ello, es suficiente sólo considerar el semiplano a la derecha de AO, incluida la propia recta AO. Al lugar geométrico F pertenece, por lo visto, el punto K (K pertenece a AO) tal que $AK = 2\,KO$. Por el punto K trazamos la recta m paralela a l. Supongamos que el punto M es el centro del triángulo regular ABC y yace más arriba que la recta m, AD es la altura de $\triangle ABC$. Como los ángulos AOB y ADB son rectos, los puntos O y D yacen en la circunferencia de diámetro AB y, por ello, $\angle AOD = \angle ABD = 60°$. Pero, los triángulos OAD

y KAM son semejantes (sus lados homólogos son proporcionales), de modo que $\angle AKM = 60°$. Si punto M yace por debajo de la recta m, por analogía, obtenemos que $\angle AKM = 120°$. Es fácil cerciorarse de lo contrario: todo punto M tal que $\angle AKM$ sea igual a $60°$ o bien a $120°$ pertenece al lugar geométrico F buscado. Definitivamente obtenemos que el lugar geométrico F son dos rectas que pasan por el punto K bajo ángulos de $60°$ y $120°$ hacia la recta AO o bien bajo ángulos de $30°$ y $150°$ hacia la recta dada d, lo que es lo mismo. **362.** Supongamos que A es el pundo dado, l, la recta dada, A', un punto simétrico a A con relación a l, m, una recta que pasa por A' y que es paralela a l. Es fácil ver que el lugar geométrico de puntos F buscado es simétrico con relación a la recta AA' y, por ello, sólo podemos examinar el semiplano situado a la derecha de dicha recta (omitiendo ésta). Sean C un punto perteneciente al lugar geométrico F y que yace más arriba de la recta m, B, el segundo vértice del triángulo regular ABC. Entonces, la circunferencia de radio AB, con centro en el punto B, pasa por los puntos A, A' y C. De inmediato de aquí se deduce que $\angle AA'C = 30°$. Pero, si el punto C yace por debajo de la recta, $\angle AA'C = 150°$. También es evidente que en la recta m al lugar geométrico F sólo pertenece el punto A'. De este modo, los puntos del lugar geométrico F, situados a la derecha de AA' del semiplano, yacen en dos rayos que salen del punto A' y que con AA' forman los ángulos de $30°$ y $150°$. Demuestren que este par de rayos es la mitad derecha del conjunto F de puntos buscado. Definitivamente obtenemos: el lugar geométrico F son dos rectas que pasan por el punto A' bajo ángulos de $30°$ y $150°$ hacia AA' o bien, lo que es lo mismo, bajo ángulos de $60°$ y $120°$ hacia la recta dada l. **363.** Construyan el punto M' correspondiente a M al girar alrededor de O a un ángulo de $90°$. La distancia desde el punto O hasta $M'N$ es igual a la mitad de la longitud del lado del cuadrado. **364.** Construyan la imagen de una de las circunferencias al girar a $60°$, siendo su centro el punto O. El punto de intersección de la segunda de las circunferencias dadas con la construida es el segundo vértice del triángulo. **365.** Construyan la cuerda de la circunferencia de longitud prefijada y de la circunferencia concéntrica a la dada, que pasa por el punto dado. Consideren el giro en torno al centro de las circunferencias con el que al punto dado corresponde el punto de intersección de la cuerda y la circunferencia construidas. **366.** El giro alrededor del centro de un triángulo a un ángulo de $120°$ traslada M a N; N a P, P a M; $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **367.** El giro en torno al cuadrado a un ángulo de $90°$ traslada P a Q, Q a R, R a S, S a P; $PQ = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.
370. Los segmentos AD y AE pueden ser trazados con ayuda de dos procedimientos En uno de los casos no se cumplen las condiciones del problema. En el otro, existe una circunferencia que pasa por los puntos B, C, D, E (su centro yace en el eje de simetría l de la «mariposa» $DEABC$). **371.** Sean O el punto de intersección de las diagonales AC y BC del cuadrado $ABCD$, MN y KL, la intersección del cuadrado con las rectas dadas (los puntos M, N, K y L pertenecen a los lados AB, CD, BC y AD del cuadrado, respectivamente). Entonces, $R_O^{90°}(AB) = AD$. La imagen del punto M será un punto M' tal del segmento AD que $\angle MOM' = 90°$, es decir, el punto L. Por analogía, $R_O^{90°}(N) = K$. Por consiguiente, $R_O^{90°}(MN) = KL$ y, por ello, $MN = KL$. **372.** Para demostrar la igualdad de los segmentos hay que hallar el movimiento con el que uno de los segmentos pasa al otro. Como el ángulo entre las rectas, a las que pertenecen los mencionados segmentos, es iguala $60°$, es natural considerar el giro en torno al punto O. Tomando en consideración que el giro alrededor del punto O a $120°$ traslada el triángulo a sí mismo, llegamos a la conveniencia de examinar el giro alrededor del punto O a $120°$. Con el giro que examinamos el punto A pasa al B, B al C, C al A, AB a BC, BC a CA, CA a AB. El punto E, perteneciente a AC, pasará al punto M que pertenece a AB (fig. 183); el punto F, perteneciente

a AB, pasará al punto N, perteneciente a BC ($\angle EOM = 120°$, $\angle FON = 120°$). Por consiguiente, EF pasará a MN. Esto significa que $EF = MN$. **373.** Sea el $\triangle PKL$ el buscado (fig. 184). Entonces, los puntos K y L se hallan a igual distancia del punto P, pertenecen a las rectas a y b, respectivamente, y se «ven» desde P bajo un ángulo de 60°. Como el punto L es la imagen del punto K al girar alrededor del punto P a 60°, él pertenece a la imagen de la recta a durante el mencionado giro (es decir, L es el punto común de la recta $a' = R_P^{60°}(a)$ y de la recta b). El punto K es la preimagen del punto L. Si $b = R_P^{60°}(a)$, el problema tiene un número infinito de soluciones. En los demás casos el problema tiene no más de dos soluciones, ya que la recta b tiene no más de un punto de intersección con la recta a' y no más de un punto de intersección con la recta $a'' = P_P^{-60°}(a)$. **374.** La perpendicularidad de dos rectas estará demostrada si trasladamos una de ellas a la otra mediante el giro a 90°. Analizando las condiciones del problema, advertimos que los puntos M y B se encuentran a iguales

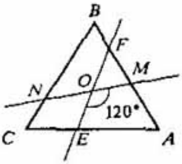


Fig. 183

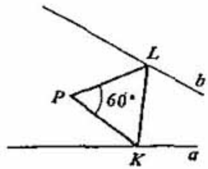


Fig. 184

distancias del punto A y $\angle MAB = 90°$. Análogamente, $AC = AP$ y $\angle CAP = 90°$. Esto quiere decir, que el giro en torno al punto A a 90° en sentido horario traslada el punto M al B y el punto C al P. **375.** Consideran el giro del plano alrededor del punto M al ángulo de 90°. **376.** Analicemos la composición de dos giros: $R_D^{90°}$ y $R_E^{270°}$. Obtenemos la traslación T_{AC}. Con esta traslación el punto D pasa a F, con la particularidad de que $\overline{DF} = \overline{AC}$. Pero, $\angle FDE = 45°$

Fig. 185

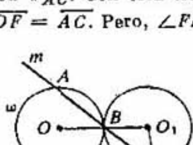


Fig. 186

y, por ello, asimismo el ángulo buscado es igual a 45°. **378.** Sea $T_{\overline{CD}}(B) = B'$, E, el punto medio del segmento AB'. Por los puntos A, B, C, D tracen rectas paralelas a BE. **379.** Sea $BC \parallel AD$. Examinen la imagen de la diagonal AC durante la traslación $T_{\overline{AD}}$. **380.** Sea $BC \parallel AD$. Consideren las imágenes de los segmentos AB y CD con las traslaciones $T_{\overline{BM}}$ y $T_{\overline{CM}}$. Demuestren que la bisectriz del ángulo del triángulo obtenido es, simultáneamente, su mediana (fig. 185). **381.** Analicemos la traslación $T_{\overline{AC}}$. Habiendo construido para el punto K el correspondiente punto L, obtenemos: $AK \parallel CL$. $\angle KCL = 90°$ y, por consiguiente, $\angle AKC = 90°$. 382. Mediante la traslación del lado lateral en el sentido y a la distancia determinados por la base del trapecio, obtendrán un triángulo. Calculen la altura del triángulo. 383. Adviertan que la suma de las distancias desde los vértices opuestos del paralelo ramo $OABC$ hasta cualquier recta son iguales, ya que dichas sumas son iguales al doble de la distancia desde el punto de intersección de las diagonales hasta la mencionada recta. 384. Construyan una circunferencia auxiliar igual a la dada, es tangente a ella y pasa por el punto M (fig. 186). Noten que $OO_1 = 2R$, $MO_1 = R$. 386. Sean las bases del trapecio $ABCD$ AD y BC, M, el punto medio del segmento BC, N, el punto medio del segmento AD. Con la traslación paralela T_{BM} el punto B pasará a M, A a A_1. Con la traslación paralela T_{CM} el punto C pasará al punto M, D a D_1. Entonces, $A_1N = AN - AA_1 = AN - BM$ (1), $ND_1 = ND - D_1D = ND - MC$ (2). Sumando las igualdades (1) y (2), obtenemos: $A_1N + ND_1 = AN + ND - (BM + MC) = AD - BC$. Pero, $A_1N + ND_1 = A_1D_1$, lo que significa que $A_1D_1 = AD - BC$ (3). Como $A_1N = ND_1$, MN es la mediana del triángulo rectángulo formado A_1MD_1. Por esta razón, $MN = \frac{1}{2} A_1N + ND_1$. Teniendo en cuenta la igualdad (3), obtenemos: $MN = \frac{1}{2} A_1D_1 = \frac{1}{2}(AD - BC)$. 387. Designemos los vértices del trapecio con A, B, C, D ($AC = 13$ cm, $BD = 20$ cm, $AD + BC = 21$ cm). Entonces, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)h$, donde h es la altura del trapecio. Examinemos la traslación paralela T_{BC}. Con esta traslación el punto B pasará al punto C, D a D'. El área del triángulo ACD' es igual a $\frac{1}{2} AD'h$. Pero, $AD' = AD + DD' = AD + BC$, por ello, asimismo, el área del trapecio $ABCD$ es igual a la del triángulo ACD'. 388. Designemos los centros de las circunferencias dadas con O_1 y O_2. Entonces, la traslación paralela $T_{\overline{O_1O_2}}$ traslada la circunferencia con centro O_1 a la circunferencia con centro O_2. Con esta traslación el punto A pasará al punto C, mientras que el punto B al D. Por lo tanto $AC = BD = O_1O_2 = d$. 389. Supongamos que el cuadrilátero $ABCD$ buscado está construido (fig. 187). Realicemos la traslación paralela $T_{\overline{DN}}$ del lado DA y la traslación paralela $T_{\overline{CN}}$ del lado CB. Ahora, del punto N salen tres segmentos NA_1, NM, NB_1 de longitud conocida. Es fácil mostrar que M es el punto medio del segmento A_1B_1. En efecto, las longitudes de los segmentos AA_1 y BB_1 son iguales a $\frac{1}{2} DC$ y estos segmentos son paralelos a DC. Por esta razón, el cuadrilátero A_1AB_1B es un paralelogramo. M es el punto medio de su diagonal AB. Por ello, M pertenece a la diagonal A_1B_1 y es su punto medio. Así, pues, en el $\triangle NA_1B_1$ son conocidos los lados NA_1, NB_1 y la mediana comprendida entre ellos. Con el fin de construir este triángulo, marquemos el punto N_1 simétrico a N con relación a M. Es evidente que $A_1N_1 = NB_1$. El triángulo NN_1A_1 puede ser construido por sus tres lados conocidos: $NA_1 = DA$, $A_1N_1 = NB_1 = CB$ y $NN_1 = 2\,NM$. Ahora construyamos el cuadrilátero. Con el punto M dividimos el segmento NN_1 en dos segmentos iguales. Construimos el punto B_1 simétrico al punto A_1 respecto a M. Con sus tres lados construimos los triángulos A_1MA y B_1MB. Trasladando el segmento AA_1 con ayuda de la traslación $T_{\overline{A_1N}}$ y el segmento BB_1 con la traslación de $T_{\overline{B_1N}}$, obtenemos los cuatro vértices del cuadrilátero $ABCD$. Es fácil mostrar la unicidad de la solución. 391. Consideremos el caso general: el triangulo ABC es irregular y, por lo tanto, los puntos O, H, M son distintos. La homotecia con centro en M y razón $k = -\frac{1}{2}$ traslada el triángulo ABC al triángulo $A'B'C'$, cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo dado. Los correpondientes lados de dichos triángulos son paralelos. Las alturas AA_1, BB_1, CC_1 del triángulo ABC pasan a las alturas $A'A'_1$, $B'B'_1$, $C'C'_1$ del triángulo $A'B'C'$ con la particularidad de que $A'A'_1$, $B'B'_1$ y $C'C'_1$ son perpendiculares a los lados del triángulo ABC trazadas por sus puntos medios. Esto significa que el punto H de intersección de las alturas del triángulo pasa, con la homotecia indicada, al centro O de la circunferencia circuns-

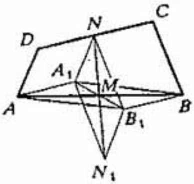


Fig. 187

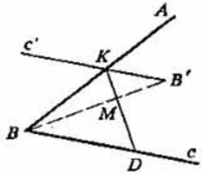


Fig. 188

crita al triángulo ABC. De aquí se desprende que los puntos M (centro de homotecia), H y O (puntos correspondientes en la homotecia) yacen en una misma recta y $\overline{MO} = -\frac{1}{2}\overline{MH}$, de donde $\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{MH}$. Si el triángulo ABC es regular, $O = M = H$ y la recta de Euler es indeterminada. 392. Sea el segmento KD el buscado, es decir, $KM : MD = 1 : 2$ (fig. 188). Entonces la homotecia $H_M^{-\frac{1}{2}}$ trasladará el punto D al punto K. Como D pertenece a BC, K pertenecerá a $B'C'$,

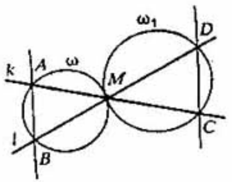


Fig.189

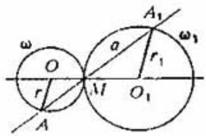


Fig. 190

donde $B'C' = H_M^{-\frac{1}{2}}(BC)$. Por lo tanto, K es el punto de intersección entre BA y $B'C'$. Habiendo construido el punto K, hallamos en BC el punto D que es la preimagen del punto K con la homotecia $H_M^{-\frac{1}{2}}$. 393. Circunferencias tangentes en el punto M son homotecias con relación a dicho punto. Analicemos la homotecia con la que ω pasa a ω_1. Esta homotecia traslada el punto A al C (fig. 189) y el punto B al D. Haciendo uso de las propiedades de la homotecia, obtenemos $AB \parallel CD$. 394. Sea M el punto de tangencia de las circunferencias ω con centro en O y radio r y ω_1 con centro en O_1 y radio r_1, a, la secante que corta las circunferencias por segunda vez en los puntos A y A_1 (fig. 190). Es necesario demostrar que $O_1A_1 \parallel OA$. Examinemos la homotecia H_M que traslada el punto O al O_1. Con semejante homotecia la recta a pasa a sí misma, ya que pasa por el centro, mientras que la circunferencia ω pasa a ω_1. El punto A perteneciente a la intersección de a y ω, pasa a un punto perteneciente a la intersección

a y ω_1, pero distinto de M, es decir, al punto A_1. Como O_1A_1 es la imagen del segmento OA con la homotecia, dichos segmentos son paralelos. 395. Designemos los puntos de intersección X de las rectas MP y NQ, Y de las rectas MR y NS, Z de las rectas PR y QS. Es fácil de advertir que la composición de las homotecias $H_X^{(M;\,P)}$ y $H_Z^{(P;\,R)}$ es la homotecia $H_Y^{(M;\,R)} \circ H_X^{(M;\,P)}$ que significa la homotecia con el centro en X, que traslada el punto M al P. Pero, si la composición

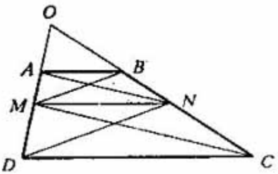


Fig. 191

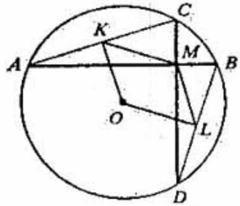


Fig. 192

de dos homotecias es una homotecia, los centros de las tres homotecias pertenecen a una misma recta, es decir, Y pertenece a ZX. La segunda parte del problema se resuelve por analogía. 396. Consideren la homotecia H_A que traslada la circunferencia ω a la ω_1. Los puntos M y N pasarán, con esta homotecia, a los puntos N_1, P_1, (N_1 es el punto de intersección de la circunferencia ω con la recta AN, P_1, el punto de intersección de la circunferencia ω con la recta AP). Entonces, la recta N_1P_1, como imagen de la recta NP, con la homotecia es paralela a ella. Debido a paralelismo de las rectas MQ y M_1P_1 los arcos MN_1 y QP_1 son iguales, por lo que también lo son los ángulos inscritos MAN_1 y QAP_1, correspondientes a ellos, es decir, $\angle MAN = \angle QAP$. 397. Sea el punto M el extremo común de los segmentos A_1, A_2, A_3, . . ., los puntos de una recta que son los otros extremos de dichos segmentos, M_1, M_2, M_3, los puntos que dividen los segmentos MA_1, MA_2, MA_3, ... en la razón dada λ, es decir, $\frac{A_1M_1}{M_1M}=\frac{A_2M_2}{M_2M}=\frac{A_3M_3}{M_3M}=\ldots=\lambda$. Mostremos que $\frac{MM_1}{MA_1}=\frac{MM_2}{MA_2}=\frac{MM_3}{MA_3}=\ldots=\frac{MA_1}{MM_1}=\frac{MM_1+M_1A_1}{MM_1}=1+\frac{M_1A_1}{MM_1}=1+\lambda$, entonces, $\frac{MM_1}{MA_1}=\frac{1}{1+\lambda}$. Por analogía, $\frac{MM_2}{MA_2}=\frac{1}{1+\lambda}$, etc. Examinemos $H_M^{\frac{1}{1+\lambda}}$; $H_M^{\frac{1}{1+\lambda}}(A_1)=M_1$; $H_M^{\frac{1}{1+\lambda}}(A_2)=M_2$, etc. Tomando en consideración que la imagen de una recta con la homotecia es una recta, obtenemos que los puntos M_1, M_2, M_3, etc,. pertenecen a una misma recta. 413. Sea que DA corta CB en el punto O (fig. 191). Entonces, $\overline{OD}=\alpha\overline{OA}$, $\overline{OC}=\alpha\overline{OB}$. Según el planteamiento, $AN \parallel CM$, de aquí $\overline{OM}=\beta\overline{OA}$, $\overline{ON}=\beta\overline{OC}$. Por consiguiente, $\overline{OD}=\frac{\alpha}{\beta}\overline{OM}$, $\overline{ON}=\frac{\alpha}{\beta}\overline{OB}$, lo que significa que $DN \parallel MB$. 415. K es el punto medio de la cuerda AC, por ello $\overline{OK}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OC})$ (fig. 192). L es el punto medio de la cuerda BD,

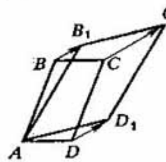


Fig. 193

por lo que $\overline{OL}=\frac{1}{2}(\overline{OB}+\overline{OD})$, $\overline{OM}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$. De aquí, $\overline{LM}=\overline{OM}-\overline{OL}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OC})$. De este modo, $\overline{OK}=\overline{LM}$ y, por consiguiente, el cuadrilátero $OKML$ es un paralelogramo. **416.** Sea CC_1 la mediana del triángulo ABC, entonces $\overline{CC_1}=\frac{1}{2}(\overline{CA}+\overline{CB})$, $|\overline{CC_1}|=\frac{1}{2}|\overline{CA}+\overline{CB}|$. Como $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ no son colineales, $|\overline{CA}+\overline{CB}|<|\overline{CA}|+|\overline{CB}|$. De aquí $CC_1<\frac{1}{2}(CA+CB)$. **417.** Sabemos que $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{0}$, de aquí $\overline{OM}=\frac{1}{3}\times(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$, O es un punto arbitrario en el plano. Como los vectores $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ no son colineales, $|\overline{OM}|<\frac{1}{3}(|\overline{OA}|+|\overline{OB}|+|\overline{OC}|)$, de

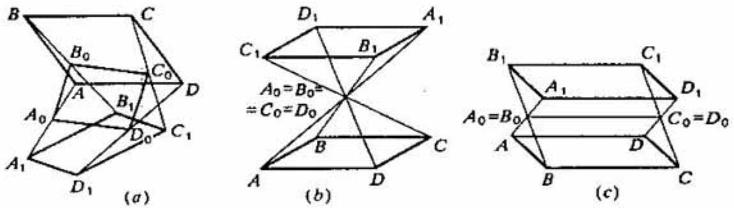


Fig. 194

donde $OM<\frac{1}{3}(OA+OB+OC)$. **418.** De acuerdo con el planteamiento $ABCD$ y $AB_1C_1D_1$ son paralelogramos, por lo que $\overline{AC_1}=\overline{AB_1}+\overline{AD_1}$ y $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}$ (fig. 193). Sustrayamos de la primera igualdad vectorial la segunda: $\overline{AC_1}-\overline{AC}=\overline{AB_1}-\overline{AB}+\overline{AD_1}-\overline{AD}$ y, por lo tanto, $\overline{CC_1}=\overline{BB_1}+\overline{DD_1}$, de donde $CC_1\leqslant BB_1+DD_1$. **419.** Sean A_0, B_0 C_0 y D_0 los puntos medios de los segmentos AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, respectivamente (fig. 194, *a*). Entonces, para el punto arbitrario O del plano $\overline{OA_0}=\frac{1}{2}(\overline{OA_1}+\overline{OA_1})$, $\overline{OB_0}=\frac{1}{2}(\overline{OB}+\overline{OB_1})$, $\overline{OC_0}=\frac{1}{2}\times(\overline{OC}+\overline{OC_1})$, $\overline{OD_0}=\frac{1}{2}(\overline{OD}+\overline{OD_1})$. De aquí, $\overline{A_0B_0}=\overline{OB_0}-\overline{OA_0}=\frac{1}{2}(\overline{OB}-\overline{OA}+\overline{OB_1}-\overline{OA_1})=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{A_1B_1})$, $\overline{D_0C_0}=\overline{OC_0}-\overline{OD_0}=\frac{1}{2}(\overline{OC}-\overline{OD}+\overline{OC_1}-\overline{OD_1})=\frac{1}{2}(\overline{DC}+\overline{D_1C_1})$. Según el planteamiento $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$ son paralelogramos y, por ello, $\overline{AB}=\overline{DC}$ y $\overline{A_1B_1}=\overline{D_1C_1}$, por consiguiente, $\overline{A_0B_0}=\overline{D_0C_0}$ y el cuadrilátero $A_0B_0C_0D_0$ es un paralelogramo. Los casos particulares de disposición mutua de los paralelogramos dados se exponen en la fig. 194 *b*, *c*. **420.** Sea $\frac{AP}{PB}=\frac{BQ}{QC}=\frac{CR}{RD}=\frac{DS}{SA}=k$ y O, el punto arbitrario en el plano. $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=k$, de donde $\frac{\overline{OP}-\overline{OA}}{\overline{OB}-\overline{OP}}=k$, lo que significa que $\overline{OP}=\frac{\overline{OA}+k\overline{OB}}{k+1}$. Por analogía,

$\overline{OQ}=\dfrac{\overline{OB}+k\overline{OC}}{k+1}$, $\overline{OR}=\dfrac{\overline{OC}+k\overline{OD}}{k+1}$, $\overline{OS}=\dfrac{\overline{OD}+k\overline{OA}}{k+1}$. Es fácil advertir que $\overline{PQ}=\overline{SR}$. En efecto, $\overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}=\dfrac{1}{k+1}(\overline{OB}-\overline{OA})+\dfrac{k}{k+1}(\overline{OC}-$ $-\overline{OB})=\dfrac{1}{k+1}\overline{AB}+\dfrac{k}{k+1}\overline{BC}$, $\overline{SR}=\overline{OR}-\overline{OS}=\dfrac{1}{k+1}(\overline{OC}-\overline{OD})+$ $+\dfrac{k}{k+1}(\overline{OD}-\overline{OA})=\dfrac{1}{k+1}\overline{DC}+\dfrac{k}{k+1}\overline{AD}$. Pero $\overline{AB}=\overline{DC}$ y $\overline{BC}=\overline{AD}$, por ello, $\overline{PQ}=\overline{SR}$ y, por consiguinte, $PQRS$ es un parelelogramo. **421.** Designemos los puntos de intersección de las medianas de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ con G y G_1, respectivamente. Sean $AG \parallel B_1C_1$, $BG \parallel A_1C_1$ y $CG \parallel A_1B_1$. Entonces, según el planteamiento, $\overline{GA}=\lambda(\overline{G_1B_1}-\overline{G_1C_1})$, $\overline{GB}=$ $=\mu(\overline{G_1C_1}-\overline{G_1A_1})$, $\overline{GC}=\gamma(\overline{G_1A_1}-\overline{G_1B_1})$. Sumando, término por término, estas igualdades, obtenemos: $\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}=\overline{G_1A_1}(\gamma-\mu)+\overline{G_1B_1}(\lambda-\gamma)+$ $+\overline{G_1C_1}(\mu-\lambda)$. Pero, $\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}=\overline{0}$ y, por ello, $\overline{G_1A_1}(\gamma-\mu)+\overline{G_1B_1}(\lambda-$ $-\gamma)+\overline{G_1C_1}(\mu-\lambda)=\overline{0}$. Por otro lado, $\overline{G_1A_1}+\overline{G_1B_1}+\overline{G_1C_1}=\overline{0}$. De aquí, hallamos que $\lambda=\gamma=\mu$. Así, pues, $\dfrac{1}{\lambda}(\overline{GA}-\overline{GB})=\overline{G_1A_1}+\overline{G_1B_1}-$ $-2\overline{G_1C_1}=3(\overline{G_1A_1}+\overline{G_1B_1})=-3\overline{G_1C_1}$, o sea, $\dfrac{1}{\lambda}\overline{BA}=-3\overline{G_1C_1}$, de donde se desprende que $BA \parallel G_1C_1$. **422.** Sean A_1, B_1, C_1 y D_1 los puntos de intersección de las medianas de los triángulos BCD, CDA, DAB, ABC, respectivamente; $\overline{OA_1}=\dfrac{1}{3}(\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$, $\overline{OB_1}=\dfrac{1}{3}(\overline{OC}+\overline{OD}+\overline{OA})$, $\overline{OC_1}=\dfrac{1}{3}(\overline{OD}+$ $+\overline{OA}+\overline{OB})$, $\overline{OD_1}=\dfrac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$ (1). Si M y M_1 son, respectivamente, los puntos de intersección de las líneas medias de los cuadriláteros $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$, $\overline{OM}=\dfrac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$. Tomando en consideración la igualdad (1), obtenemos: $\overline{OM_1}=\dfrac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$, lo que demuestra que $M_1=M$. **423.** Sea R el punto medio de ML y esté dado que $d \parallel OR$ (fig. 195). P. ej. demostremos que en tal caso $c \parallel OE$, donde E es el punto medio de NP. Tenemos: $\overline{OP}=m\overline{OL}$, $\overline{ON}=n\overline{OM}$, $NP \parallel OR$, es decir, $\overline{OP}-\overline{ON}=k(\overline{OM}+\overline{OL})$. Pongamos en esta última igualdad los valores de $\overline{OP}$ y $\overline{ON}$: $m\overline{OL}-n\overline{OM}=k\overline{OM}+k\overline{OL}$, es decir, $(m-k)\overline{OL}=$ $=(k+n)\overline{OM}$. Como los vectores $\overline{OL}$ y $\overline{OM}$ no son colineales, $m-k=0$, $k+n=0$, o sea, $m=k$, $n=-k$. Entonces, $\overline{OP}=k\overline{OL}$; $\overline{ON}=-k\overline{OM}$. Analicemos el vector $(\overline{ON}+\overline{OP})$, colineal a $\overline{OE}$, $\overline{ON}+\overline{OP}=-k\overline{OM}+$ $+k\overline{OL}=k(\overline{OL}-\overline{OM})=k\overline{ML}$. Por consiguiente, $OE \parallel ML$. Por analogía, podemos también demostrar la indicada propiedad para otras rectas. **424.** Supongamos que las rectas m_1 y l_1 se cortan en el punto K (fig. 196). Demostremos que $\overline{KC_0} \parallel n$. $\overline{KC_0}=\overline{SC_0}-\overline{SK}$; $\overline{SC_0}=\frac{1}{2}\overline{SA}+\frac{1}{2}\overline{SB}$; $\overline{SK}=\overline{SA_0}+\overline{A_0B_0}+$ $+\overline{B_0K}=\dfrac{1}{2}\overline{SB}+\dfrac{1}{2}\overline{SC}+\dfrac{1}{2}\overline{SA}-\dfrac{1}{2}\overline{SB}+m\overline{SB}=m\overline{SB}+\dfrac{1}{2}\overline{SA}+$ $+\dfrac{1}{2}\overline{SC}$. Por otro lado $\overline{SK}=\overline{SB_0}+\overline{B_0A_0}+\overline{A_0K}=\frac{1}{2}\overline{SB}+\frac{1}{2}\overline{SC}+\frac{1}{2}\overline{SA}-$

$-\frac{1}{2}\overline{SA} + n\overline{SA} = n\overline{SA} + \frac{1}{2}\overline{SB} + \frac{1}{2}\overline{SC}$. Entonces, $m\overline{SB} + \frac{1}{2}\overline{SA} + \frac{1}{2}\overline{SC} = n\overline{SA} + \frac{1}{2}\overline{SB} + \frac{1}{2}\overline{SC}$ o bien $m\overline{SB} + \frac{1}{2}\overline{SA} = n\overline{SA} + \frac{1}{2}\overline{SB}$, de donde $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$. Por esta razón, $\overline{SK} = \frac{1}{2}(\overline{SA} + \overline{SB} + \overline{SC})$. Entonces, $\overline{KC_0} = \frac{1}{2}\overline{SA} + \frac{1}{2}\overline{SB} - \frac{1}{2}(\overline{SA} + \overline{SB} + \overline{SC}) = -\frac{1}{2}\overline{SC}$, debido a lo cual $KO_0 \parallel SC$, es decir, la recta n_1 pasa por el punto de intersección de las

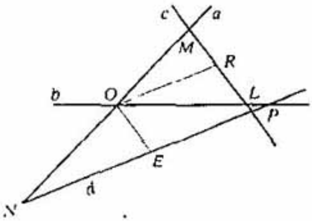


Fig. 195

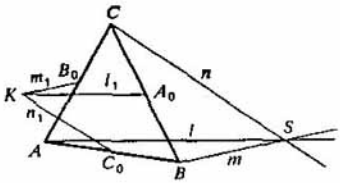


Fig. 196

rectas l_1 y m_1. **425.** Véase la solución del problema 424. **426.** Primero, demostremos que en cualquier cuadrilátero $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{CD} + \overline{BA})$, donde M y N son los puntos medios de CB y DA, respectivamente. $\overline{MN} = \overline{MC} + \overline{CD} + \overline{DN}$, $\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BA} + \overline{AN}$. Después de sumar estas igualdades y teniendo en cuenta que $\overline{MC} + \overline{MB} = \overline{0}$, $\overline{DN} + \overline{AN} = \overline{0}$, obtenemos: $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{CD} + \overline{BA})$. Sea que los vectores $\overline{CD}$ y $\overline{BA}$ no son colineales, entonces $MN < \frac{1}{2}(CD + BA)$, lo que es fácil de demostrar haciendo uso de la propiedad de los lados del triángulo. Por consiguiente, $CD \parallel BA$, es decir, el cuadrilátero dado $ABCD$ es un trapecio o paralelogramo. **427.** $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \overline{0}$. Por ello, $\overline{OA_1} - \overline{OA} + \overline{OB_1} - \overline{OB} + \overline{OC_1} - \overline{OC} = \overline{0}$. Si O es el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC, $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{0}$, por consiguiente, también $\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OP_1} = \overline{0}$. De aquí se desprende que O es el punto de intersección de las medianas del triángulo $A_1B_1C_1$. **428.** $\overline{CA_2} = \overline{A_2A} + \overline{AC}$. Durante el giro a 90° $\overline{A_2A}$ pasará a $\overline{CB}$, $\overline{AC}$ a $\overline{BB_2}$, es decir, $\overline{CA_2}$ pasará a $\overline{CB} + \overline{BB_2} = \overline{CB_2}$, de donde se deduce que $CA_2 \perp CB_2$ y $CA_2 = CB_2$. **429.** Sea D el punto medio de C_1C_1' (fig. 197). $\overline{CD} = \frac{1}{2}(\overline{CC_1} + \overline{CC_1'})$. Al girar a 90° los vectores $\overline{CC_1}$ y $\overline{CC_1'}$ pasarán a los vectores $\overline{CA}$ y $-\overline{CB}$, respectivamente. Por lo tanto, durante este giro la suma de los vectores $\overline{CC_1} + \overline{CC_1'}$ pasará al vector $\overline{CA} - \overline{CB}$, o sea, al vector $\overline{BA}$. Por esto, $(\overline{CC_1} + \overline{CC_1'}) \perp \overline{BA}$, $|\overline{CC_1} + \overline{CC_1'}| = |\overline{BA}|$, de donde se duduce la afirmación del problema. **430.** Demostremos que el vector $\overline{PR}$ se obtiene del vector $\overline{SQ}$ con el giro a 90° (fig. 198). $\overline{SQ} = \overline{SL} + \overline{LK} + \overline{KQ}$ o bien $\overline{SQ} = \overline{SL} +$

$+\frac{1}{2}(\overline{DC}+\overline{AB})+\overline{KQ}$. Hagamos girar a 90° cada uno de los vectores del segundo miembro de la última igualdad. Entonces, $\overline{SL}$ pasará a $\overline{LD}=\frac{1}{2}\overline{AD}$, $\frac{1}{2}\overline{DC}$ a $\overline{MR}$, $\frac{1}{2}\overline{AB}$ a $\overline{PN}$, $\overline{KQ}$ a $\frac{1}{2}\overline{BC}$. En tal caso, $\overline{SQ}$ pasará a $\frac{1}{2}\overline{AD}+\overline{MR}+\overline{PN}+$ $+\frac{1}{2}\overline{BC}=\overline{PN}+\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})+\overline{MR}=\overline{PN}+\overline{NM}+\overline{MR}=\overline{PR}$. Esto significa que $\overline{PR}$ se obtiene mediante el giro de $\overline{SQ}$ a 90°. Por lo tanto, $PR\perp$

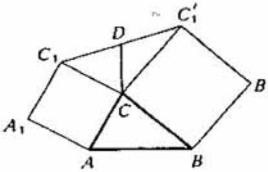


Fig. 197

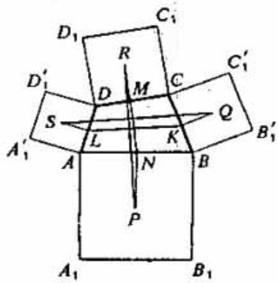


Fig. 198

$\perp SQ$, $PR=SQ$. **431.** Como $\frac{\overline{MA}+\overline{MB}}{2}=-\frac{\overline{MC}+\overline{MD}}{2}$, $\overline{MA}+\overline{MB}+$ $+\overline{MC}+\overline{MD}=\overline{0}$, es decir, $\overline{MD}=-(\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC})$. Tenemos: $\overline{U}=$ $=\overline{MA}+\overline{MB}$, $\overline{V}=\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}=-\overline{MD}$, o sea, $\overline{V}=-\overline{MD}$. Esto quiere decir que M es el punto medio del segmento DV. Expresemos el área del cuadrilátero $MAUV$. a) $S_{MAUV}=S_{MAV}+S_{MUV}=S_{MAB}+S_{MCD}$; b) $S_{MAUV}=S_{MAV}+S_{UAV}=S_{MAD}+S_{MBC}$. De aquí, $2S_{MAUV}=$ $=S_{MAB}+S_{MCD}+S_{MAD}+S_{MBC}=S_{ABCD}$. Así, pues, $S_{ABCD}:S_{MAUV}=$ $=2$. **432.** Sean AL y BK las medianas del triángulo ABC y M el punto de intersección de AL y BK. En tal caso, $\overline{KL}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ (1). A continuación, $\overline{KL}=$ $=\overline{KM}+\overline{ML}$ (2). De (1) y (2) se desprende que $\overline{KM}+\overline{ML}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, de donde $2\overline{KM}+2\overline{ML}=\overline{AB}$, pero, $\overline{AM}+\overline{MB}=\overline{AB}$ lo que significa que $2\overline{KM}+$ $+2\overline{ML}=\overline{AM}+\overline{MB}$ o bien $(\overline{AM}-2\overline{ML})+(\overline{MB}-2\overline{KM})=\overline{0}$. Los vectores $\overline{AM}-2\overline{ML}$ y $\overline{MB}-2\overline{KM}$ son colineales a los vectores $\overline{AL}$ y $\overline{BK}$, respectivamente, por ello $\overline{AM}-2\overline{ML}=\overline{0}$ y $\overline{MB}-2\overline{KM}=\overline{0}$, es decir, $\overline{AM}=$ $=2\overline{ML}$ y $\overline{MB}=2\overline{KM}$, lo que quiere decir que $\frac{|\overline{AM}|}{|\overline{MB}|}=2$ y $\frac{|\overline{ML}|}{|\overline{KM}|}=2$. **433.** Ante todo demostremos que los puntos M, N y B pertenecen a una misma recta. Con este fin hay que demostrar que los vectores $\overline{MN}$ y $\overline{NB}$ son colineales. $\overline{MN}=\overline{MA}+\overline{AN}$; $\overline{MA}=\frac{1}{5}\overline{DA}$; $\overline{AN}=\frac{1}{6}(\overline{AB}+\overline{AD})$; $\overline{MN}=\frac{1}{5}\overline{DA}+$

$+\frac{1}{6}\overline{AB}-\frac{1}{6}\overline{DA}=\frac{1}{6}\overline{AB}+\frac{1}{30}\overline{DA}=\frac{1}{30}(5\overline{AB}+\overline{DA})$; $\overline{NB}=\overline{NA}+\overline{AB}=$ $=\overline{AB}-\frac{1}{6}\overline{AB}-\frac{1}{6}\overline{AD}=\frac{5}{6}\overline{AB}+\frac{1}{6}\overline{DA}$. $\overline{NB}=\frac{1}{6}(5\overline{AB}+\overline{DA})$, lo que significa que $\overline{NB}=5\overline{MN}$, por consiguiente, los vectores $\overline{NB}$ y $\overline{MN}$ son colineales. El punto N divide el segmento MB en la razón $1:5$. 434. En el lenguaje vectorial, el requisito del problema consiste en demostrar el hecho de que $\overline{MO}=$ $=\overline{ON}$, donde O es el punto de intersección de los segmentos, cuyos extremos son los puntos medios de los lados opuestos del cuadrilátero $ABCD$, en tanto que M y N son los puntos medios de las diagonales BD y AC. $\overline{MO}=\overline{MP}+\overline{PO}$, pero $\overline{MP}=\frac{1}{2}\overline{DA}$, lo que quiere decir que $\overline{MO}=\frac{1}{2}\overline{DA}+\overline{PO}$ (1). A continuación, $\overline{ON}=\overline{OR}+\overline{RN}$, $\overline{RN}=\frac{1}{2}\overline{DA}$, por consiguiente $\overline{ON}=\frac{1}{2}\overline{DA}+\overline{OR}$ (2). Comparando (1) y (2) y tomando en consideración que $\overline{PO}=\overline{OR}$, obtenemos: $\overline{MO}=\overline{ON}$. 435. Si los segmentos A_1A_2 y B_1B_2 yacen en las rectas paralelas a l_1,

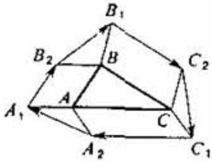


Fig. 199

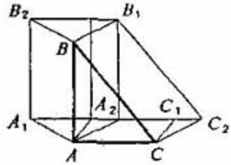


Fig. 200

en el caso cuando $\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2}$ hay un número infinito de soluciones: es suficiente tomar en la recta cualquier segmento C_1C_2 tal que $\overline{C_1C_2}=\overline{A_1A_2}$. Pero si los segmentos dados son tales que $\overline{A_1A_2}\neq\overline{B_1B_2}$, es evidente que los puntos C_1, C_2 requeridos no existen. Ahora, para mayor certeza, supongamos que A_1A_2 no es paralelo a l y sea A_3 el punto de intersección de las rectas A_1A_2 y l_1. En la recta B_1B_2 construimos dos puntos M_1 y M_2 tales que $B_1B_2:B_2M=A_2A_1:A_2A_3$ y designemos con B_3 aquel de ellos para el que se cumple la condición: si A_1 yace entre los otros dos puntos en la recta A_1A_2, entonces B_1 yace entre los otros dos puntos en la recta B_1B_2. Ahora unamos los puntos B_3 y A_3 y tracemos por los puntos B_1 y B_2 rectas paralelas a A_3B_3; sus puntos C_1 y C_2 de intersección con la recta l son los buscados. En efecto, $\frac{C_1C_2}{C_2A_3}=\frac{B_1B_2}{B_2B_3}=\frac{A_1A_2}{A_2A_3}$, de donde con ayuda de la proporción deducida, tenemos: $\frac{C_1A_3}{C_2A_3}=\frac{A_1A_3}{A_2A_3}$. Entonces, los ángulos $A_1C_1A_3$ y $A_2C_2A_3$ son iguales como los ángulos correspondientes de los triángulos semejantes $A_1C_1A_3$ y $A_2C_2A_3$, de modo que $A_1C_1 \parallel A_2C_2$. 436. Consideremos la solución de este problema según el método vectorial (fig. 199). Según la propiedad de la suma de vectores representados con una quebrada cerrada, tenemos: $\overline{A_1B_2}+\overline{B_2B_1}+\overline{B_1C_2}+\overline{C_2C_1}+\overline{C_1A_2}+\overline{A_2A_1}=\overline{0}$. Haciendo uso de las propiedades asociativa y conmutativa de la suma de vectores, obtenemos: $\overline{B_2B_1}+\overline{C_2C_1}+\overline{A_2A_1}+(\overline{A_1B_2}+\overline{B_1C_2}+\overline{C_1A_2})=\overline{0}$. Como $\overline{A_1B_2}=$ $=\overline{AB}$, $\overline{B_1C_2}=\overline{BC}$, $\overline{C_1A_2}=\overline{CA}$ y $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{0}$, la suma de vectores entre paréntesis es asimismo igual al vector nulo. Por esta razón, $\overline{B_2B_1}+$

$+\overline{C_2C_1}+\overline{A_2A_1}=\overline{0}$ pero, entonces, $\overline{B_2B_1}=\overline{C_1C_2}-\overline{A_2A_1}$. Está claro, que cualquiera de los tres vectores dados puede ser representado como la diferencia de los otros dos. Si estos vectores no son colineales el triángulo requerido existe. Pero dos de los tres vectores dados no pueden ser colineales, ya que entonces el tercero será colineal a ellos (como la suma de dos vectores colineales). No obstante, es posible el caso cuando los tres vectores son colineales. En efecto, si tomamos como el vértice A_1, p. ej., del tercer paralelogramo cualquier punto de la recta paralela a C_1C_2, en este caso obtenemos (fig. 200): $\overline{B_2B_1}=\overline{B_2B}+\overline{BB_1}=$ $=\overline{A_1A}+\overline{CC_2}=(\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A})+(\overline{CC_1}+\overline{C_1C_2})=(\overline{A_1A_2}+\overline{C_1C_2})+(\overline{A_2A}+$ $+\overline{CC_1})=\overline{A_1A_2}+\overline{C_1C_2}$. Así, pues $\overline{B_2B_1}=\overline{A_1A_2}+\overline{C_1C_2}$, es decir, el triángulo requerido no existe. De este modo, la construcción de este triángulo sólo es posible cuando los vectores, que corresponden a los segmentos indicados en el planteamiento, no son colineales. Examinemos la solución del anterior problema (acerca de la posibilidad de la construcción del triángulo) según el método de la traslación paralela. Sean no colineales los vectores $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$, $\overline{A_1A_2}$. Realicemos la traslación paralela $T_{\overline{CA}}$ del triángulo CC_1C_2 (fig. 201). Entonces, CC_2 pasará a AB_3, CC_1 a AA_2 y C_1C_2 a A_2B_3. En efecto, $BB_1 \parallel CC_2$ y $BB_1=$ $=CC_2$; $AB_2 \parallel B_2B_1$ y $AB_2=B_2B_1$. De acuerdo con la transitividad de las relaciones de paralelelismo e igualdad, tenemos: $CC_2 \parallel AB_3$ y $CC_2=AB_3$. Pero entonces, C_1C_2 pasará a A_2B_3. Realizando la traslación paralela $T_{\overline{BA}}$ del triángulo BB_1B_2, definitivamente obtenemos: B_2 pasará a A_1, B_1 a B_2, C_2 a B_3, C_1 a A_2 y, de este modo, el $\triangle A_1B_3A_2$ tendrá los lados iguales a los segmentos B_2B_1, C_1C_2 y A_2A_1.

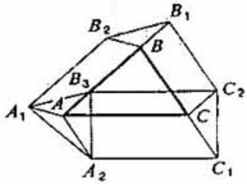


Fig. 201

543. a) $2\sqrt{\dfrac{2S}{\operatorname{sen}\beta}}$, b) $2\sqrt{S\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}$; c) $2\left(1+\operatorname{sen}\dfrac{\beta}{2}\right)\sqrt{\dfrac{2S}{\operatorname{sen}\beta}}$.

544. $\arccos\dfrac{4}{5}$. 545. $b+\dfrac{c}{2}$. 546. El valor mínimo es igua a h_c, el máximo, a h_a. 547. La diagonal es la altura del triángulo. 548. $4\sqrt{2}$ m. 549. 30 cm. 550. a) 6000 cm^2; b) 108 cm^2. 551. $KD=MD=5$ cm; $S=32$ cm^2. 552. a) 45 cm^2; b) 36, 125 cm^2. 553. a), b) $AC=BC$. 554. a), b) El ángulo central del sector es igual a 2.

555. $\dfrac{p}{\pi+4}$. 556. La altura del rectángulo $\dfrac{\sqrt{h^2+8R^2}-3h}{4}$. 557. $\dfrac{3}{4}R^2\sqrt{3}$. 558. *I procedimiento*. Sea que en el triángulo ABC esté dado $AC=b$, $\angle B=\beta$. Designen $\angle BAC=x$, expresen AB y BC con b, x y β y dupliquen la mediana, construyendo el triángulo hasta un paralelogramo. *II procedimiento* (geométrico). Circunscriban una circunferencia al triángulo ABC y demuestren que la mediana BM de un triángulo arbitrario es menor (en el caso del ángulo obtuso, mayor) que la mediana B_1M del triángulo isósceles AB_1C. 559. Sean AP y CK perpendiculares a l; designen: $\angle PBA=x$. Después de los cálculos demuestren que $PB=BK$. 560. a) $\dfrac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{27}}$; b) $3\sqrt{3}\,r^2$. Designen con la letra x la mitad del ángulo en la base del triángulo. 561. $\dfrac{75}{4}$ cm^2. Sea $PKME$ el trapecio inscrito, el punto E yace en BC, el punto M, en CD. Los triángulos PAK y ECM son semejantes. Habiendo hecho uso de esto, introduzcan las designaciones; $CM=2x$, $CE=3x$. 562. 100°. Véase el ejemplo 4 del § 7.

Capítulo II

631. 60°. 632. 60°. 633. 115°; 35°. 634. 30°. 635. $2 \arccos \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)$. 636. $\operatorname{arcsen} \frac{4}{5}$. 637. $\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{6}}{3}$. 638. 90°. 639. $\operatorname{arcsen} \frac{6\sqrt{34}}{85}$. 640. 30°; $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{51}}{17}$. 641. $\operatorname{arcsen} \frac{4ab\sqrt{39}}{13(a^2+b^2)}$. 642. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{15}}{15}$. 643. $\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{2}}{6}$. 644. $\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{6}}{3}$. 645. $\operatorname{arcsen} \frac{4\sqrt{65}}{65}$. 646. $\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{15}}{5}$; $\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{15}}{15}$.

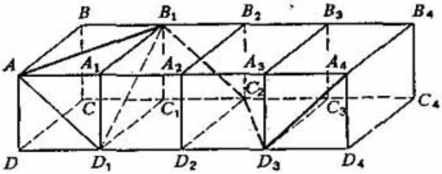


Fig. 202

647. $\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{9}$. 648. $\operatorname{arcsen} \frac{2\sqrt{30}}{15}$. 649. $\operatorname{arcsen} \frac{2\sqrt{30}}{15}$. 650. $\operatorname{arcsen} \left(\frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha} \right)$. 651. $\frac{R}{2}(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$. 652. 60°. 653. El primer segmento forma con el segundo, tercero y cuarto segmentos ángulos de 120°, 90° y 60°, respectivamente; el segundo con el tercero y cuarto segmentos, 120° y 90°; el tercero con el cuarto, 120°. Con

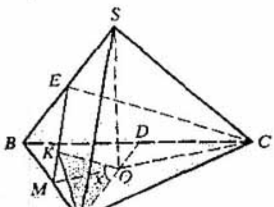


Fig. 203

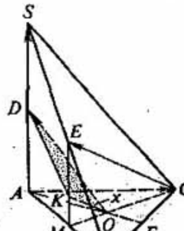


Fig. 204

el fin de hallar el $\angle AB_1C_2$ (fig. 202), construyamos AD_1, D_1C_2 y B_1D_1. Como $AD_1 \parallel B_1C_2$, los puntos A, B_1, C_2 y D_1 yacen en un mismo plano. Por consiguiente, $\angle AB_1C_2 = \angle AB_1D_1 + \angle D_1B_1C_2$. Para hallar el ángulo entre las rectas AB_1 y C_2D_3 es posible emplear el paralelismo de las rectas C_2D_3 y BA_1. 654. 45°. 657. $\arccos \frac{1}{6}6$. Sea CM la mediana del triángulo ABC (fig. 203). En el plano CEM

por el punto O, trazamos la recta $OK \parallel CE$. Entonces, $\angle AOK$ es igual al ángulo entre las rectas AD y CE. Es posible hallar $\angle AOK$ calculando los lados del triángulo AOK. Como parámetro auxiliar es conveniente tomar $AB = a$. **658.** $\arccos \frac{5\sqrt{102}}{102}$. *I procedimiento.* Sea CM la mediana del triángulo ABC (fig. 204). Por el punto O en el plano CEM trazamos la recta $OK \parallel CE$. Entonces, $\angle KOD$ es igual al ángulo entre las rectas OD y CE. Es posible hallar el ángulo KOD calculando los lados del triángulo KOD. *II procedimiento.* Como

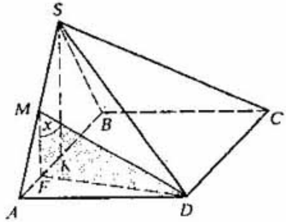


Fig. 205

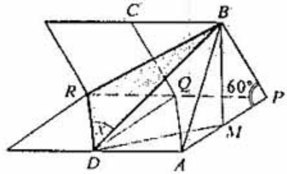


Fig. 206

$AS \perp AC$, $AS \perp AB$, $AB \perp AC$ y $AB = AC = AS$, es posible introducir un sistema cartesiano rectangular de coordenadas, haciendo $\overline{AC} = \bar{i}$, $\overline{AB} = \bar{j}$, $\overline{AS} = \bar{k}$. Entonces, $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = \frac{2}{3}\overline{FA} + \overline{AD} = -\frac{1}{3}\bar{i} - \frac{1}{3}\bar{j} + \frac{1}{2}\bar{k}$, $\overline{CE} = \overline{CB} + \overline{BE} = -\frac{3}{2}\bar{i} + \bar{j} + \frac{1}{2}\bar{k}$. **659.** $\arccos (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + \cos \alpha \cos \beta \times$ $\times \cos \gamma)$. **660.** 45°; 60°. **661.** $\arccos \frac{1}{5}$. Haciendo $\overline{DC} = \bar{i}$, $\overline{DA} = \bar{j}$, $\overline{DD_1} = \bar{k}$, hallamos que $\overline{DP} = \overline{DA} + \overline{AP} = \bar{j} + \frac{1}{2}\bar{k}$, $\overline{QC} = \overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{CC_1} = \bar{i} + \frac{1}{2}\bar{k}$. **662.** $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$. **663.** $\arccos \frac{\sqrt{10}}{5}$. **664.** $\operatorname{arctg} \sqrt{19}$. En la cara SAB, por el punto M, trazamos $MF \parallel SK$ (fig. 205). Entonces, el ángulo buscado es igual a $\angle DMF = x$. Haciendo $AB = a$ (parámetro auxiliar), podemos hallar los lados FD y MF del triángulo DMF y, a continuación, $\operatorname{tg} x$. **665.** $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$. **666.** $\arccos \frac{1}{4}$. **667.** $\arccos \left(-\frac{1}{4}\right)$. Por el punto D en el plano APQ trazamos la recta $DR \parallel AQ$ (fig. 206). Entonces, $\angle BDR$ es igual al ángulo entre los rayos DB y AQ. Para determinar este ángulo es posible hallar los lados del triángulo BDR. Si tomamos como parámetro auxiliar $BC = a$, en el triángulo BDR $DR = a\sqrt{2}$, $BR = a\sqrt{5}$. El lado BD puede hallarse del triángulo rectángulo BDM, donde $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Obtenemos: $BD = a\sqrt{2}$ y, a continuación, según el teorema de los cosenos, hallamos $\angle BDR$. **668.** $\arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$. Descomponiendo los vectores $\overline{BP}$ y $\overline{OL}$ en los vectores $\bar{i} = \overline{OC}$, $\bar{j} = \overline{OD}$, $\bar{k} = \overline{OS}$ de la base rectangular cartesiana y, más adelante, hallamos el coseno del ángulo entre los vectores $\overline{BP}$ y $\overline{OL}$. Es posible operar de otro modo. Por el punto O en el plano SBD trazamos la recta $OM \parallel BP$. Entonces, $\angle LOM$ es igual al ángulo buscado. Con el fin de determinarlo hay que hallar los lados LM, OL y OM del triángulo LOM y, seguidamente, aplicar el teorema de los cosenos. 669. $\arccos\left(-\frac{1}{10}\right)$. Descomponer los vectores $\overline{KB}$ y $\overline{CD}$ por los vectores $\bar{i}=\overline{MA}$, $\bar{j}=\overline{MD}$ y $\bar{k}=\overline{MB}$ de la base rectangular cartesina, donde M es el punto medio de la diagonal AC del cuadrado $ABCD$. 670. $\arccos\frac{1}{4}$. 671. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{8}\right)$.

Por el punto S en el plano SBC trazamos la recta $l \parallel BD$ y por el punto D, la recta $m \parallel SB$. Sea que las rectas l y m se cortan en el punto K. Entonces, $\angle KSO$ es

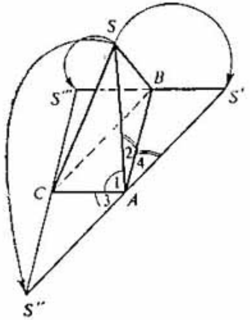


Fig. 207

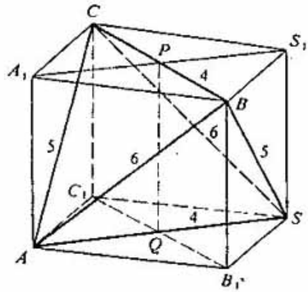


Fig. 208

igual al ángulo buscado. Para determinar $\angle KSO$ es preciso hallar los lados KO, SK y SO del triángulo KSO y, a continuación, aplicar el teorema de los cosenos. 672. $\arccos(\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta)$. 673. 4,8 cm. 674. $\frac{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{|\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)|}$. 675. $\frac{a}{2}$. 676. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. 677. R; $\sqrt{R^2+h^2\operatorname{sen}^2\alpha}$. 678. $\frac{ab}{a+b}$. 679. $\frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$. 680. $a\sqrt{\frac{a^2\operatorname{sen}^2\varphi+h^2}{a^2+h^2}}$. 681. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 682. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. 683. $\frac{R\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$. 684. $\sqrt{b^2-a^2\operatorname{ctg}^2\alpha}$. 685. $\sqrt{22{,}5}$ cm, $\sqrt{13{,}5}$ cm, $\sqrt{2{,}5}$ cm. Si cortamos la pirámide por las aristas SA, SB, SC, desarrollando las caras laterales, como se muestra en la fig. 207, obtenemos el triángulo $S'S''S'''$. En efecto, como después del giro el ángulo se conserva, $\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$, y, por lo tanto, $\angle 3+\angle BAC+\angle 4=180°$, es decir, el punto A yace en el lado $S'S''$. De forma análoga, el punto B yace en el lado $S'S'''$ y el punto C, en el lado $S''S'''$. En el triángulo $S'S''S'''$ AB, AC y BC son las líneas medias y, por ello, los triángulos SAB, SBC, SAC y ABC son las representaciones de cuatro triángulos iguales. Dispongan, a continuación, la pirámide dada en un paralelepípedo, como se muestra en la fig. 208, y, después de demostrar que este paralelepípedo es rectangular, hallen las distancias buscadas. 690. 60°. 691. 90°. 692. 45°. 693. $\arccos(\operatorname{ctg}^2\alpha)$. 694. $\arccos(\operatorname{sen}\beta\cos\alpha)$, donde $0°<\alpha<90°$.

695. $\arcsen\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\alpha\right)$. 696. $\alpha_1=\arccos\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}$, $\beta_1=$ $=\arccos\frac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma}$, $\gamma_1=\arccos\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$. 697. $\arcsen\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a}}$. 698. $\arcsen\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\right)$. 699. $\arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha\right)$. 700. $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{6}}{3}$. Bajamos del punto K la perpendicular KL al plano ABC y, después del punto L la perpendicular LM a la mediana AD y unimos el punto M con el punto K.

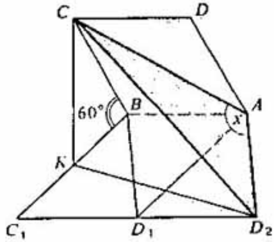


Fig. 209

El ángulo KML será el ángulo lineal del diedro buscado. Con el fin de determinar $\angle KML$ es posible hallar los catetos KL y ML del triángulo rectángulo KML. 701. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{21}}{6}$. 702. $\arccos\frac{17}{35}$. 703. $2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\right)$. 704. 30°; 60°; 120°; 60°. 705. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$. 706. $\arccos\sqrt{\frac{1-2\cos\alpha}{3}}$. 707. $2\arcsen\left(\sqrt{\frac{1+3\cos^2\alpha}{2}}\right)$. 709. $\arccos\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{3+\cos\alpha}}$. 710. 45°. Bajemos del punto L la perpendicular LN al plano $ABCD$ y, a continuación, del punto N la perpendicular NM a la recta FK. Unan los puntos L y N. El ángulo LMN será el ángulo lineal del diedro buscado. Para determinar $\angle LMN$ podemos hallar los catetos LM y MN del triángulo rectángulo LMN. 711. $\arccos(-\cos^2\alpha)$. 712. $\frac{180^\circ}{n}$. 713. $\arccos\left(\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\operatorname{ctg}\alpha\right)$. 714. $\arcsen\left(\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\operatorname{ctg}\alpha\right)$.

715. $\operatorname{tg}x=-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{-\cos\left(\frac{\pi}{n}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}-\alpha\right)}}$. 716. $\arccos\frac{1}{5}$. En el plano ABC_1D_1, por el punto A, trazamos una recta paralela a BD_1 y designamos con D_2 un punto de intersección con la recta C_1D_1 (fig. 209). El ángulo CAD_2 será el buscado. Para determinarlo, haciendo, p. ej., $AB=a$ (parámetro auxiliar), podríamos hallar los lados CD_2, AC y AD_2 del triángulo CAD_2 y después, aplicar a éste el teorema de los cosenos. 717. $\arccos\frac{2+3\sqrt{2}}{8}$.

718. 45°. 719. $\arccos\frac{3\sqrt{2}-2}{8}$. 720. $\arcsen\frac{3\sqrt{58}}{29}$. Bajemos la perpendicular CP del punto C al plano SAB. Entonces, el segmento DP será la proyección de CP en el plano SAB, y por lo tanto, $\angle CDP$ será el buscado. Con el fin de determinar $\angle CDP$ es posible, haciendo $AB=a$ (parámetro auxiliar), hallar cualesquiera dos lados del triángulo CDP. 721. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$.

722. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$. 723. $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{7}}{3}$. 724. a, $\frac{2}{3}a$, $\frac{1}{3}a$. 725. $\frac{a}{6}$.

726. $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$. 727. $\frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$. 728. $3a^2$. 729. $\frac{S}{a}$.

730. $\frac{H^2\,\mathrm{sen}\,2\alpha}{8\,\mathrm{sen}\,(30^\circ-\alpha)\,\mathrm{sen}\,(30^\circ+\alpha)}$. 731. $\frac{3a\sqrt{17}}{17}$. 732. $\frac{7a^2\sqrt{17}}{24}$.

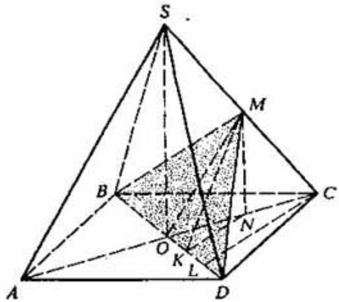


Fig. 210

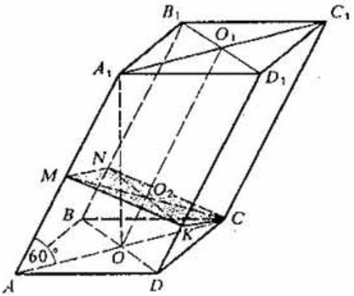


Fig. 211

733. $\frac{7a^2\sqrt{113}}{72}$. 734. $\frac{a^2\sqrt{19}}{10}$. 735. $\frac{a^2\sqrt{51}}{8}$. $S_{sec}=\frac{1}{2}BD\cdot MK$, donde $MK\perp\perp BD$. La construcción $MK\perp BD$ se puede realizar del modo siguiente (fig. 210): 1) por el punto O en el plano SAC se traza $OM\parallel SA$; 2) por el punto M en el plano SAC se baja la perpendicular MN a AC; 3) del punto C se baja la perpendicular CL a BD; 4) por el punto N se traza $NK\parallel CL$; 5) se unen los puntos M y K. La longitud del segmento MK se puede hallar del triángulo rectángulo MNK. 736. $\frac{al^2\sqrt{3}\cos\alpha\sqrt{1+3\cos\alpha}}{2}$.

737. $-\frac{a^2\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{2\cos 3\alpha}$. 738. En $\frac{2S\sqrt{3}}{3}$ cm². 739. $\frac{S(c+H)}{2}$. 740. $\frac{b}{6}\times\times\sqrt{a^2+c^2}$. 741. $\frac{2aH}{\sqrt{9a^2+4H^2}}$. 742. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$, donde $a\leqslant\frac{2b\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$ (b es la arista lateral). 743. $\frac{a^2\,\mathrm{sen}^2\,2\alpha\cos\beta}{\mathrm{sen}^2\,(\alpha+\beta)}$. 744. $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. 745. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Es posible construir la sección requerida del modo siguiente (fig. 211): 1) construyan la mediana CM del triángulo AA_1C (es evidente, que en tal caso $CM\perp AA_1$) 2) hallen el punto O_2 de intersección de las rectas CM y OO_1

3) por el punto O_2 en el plano BB_1D_1D tracen la recta $NK \parallel BD$; 4) el cuadrilátero $CKMN$ es la sección buscada.

746. $\frac{a^2}{2}\sqrt{\operatorname{sen}(60^\circ+\alpha)\operatorname{sen}(60^\circ-\alpha)}$, donde $0^\circ < \alpha < 45^\circ$. 747. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\times$ $\times\left(1+\sqrt{\frac{6n+3m}{m}}\right)$ o bien $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{\frac{6m+3n}{n}}\right)$, donde $a <$ $< H\sqrt{6}$ (H es la altura de la pirámide). 748. $\frac{a}{4}$. Como $AC = BC = a$ y $AB =$ $= a\sqrt{2}$ (fig. 212), $\angle ACB = 90^\circ$ y en el triángulo rectángulo SAC $SC = a\sqrt{3}$, mientras que en el triángulo rectángulo SAB $SB = 2a$. La construcción de la sección requerida se puede realizar de la forma siguiente: 1) construir CD que es la mediana del triángulo ABC; 2) construir la recta $KL \parallel$ $\parallel CD$ (es evidente que, entonces, $AB \perp KL$ y $SB \perp KL$); 3) construir AP que es la mediana del triángulo SAB; 4) por el punto L en el plano SAB trazar la recta $LN \parallel AP$; 5) desde el punto A en el plano SAC bajar la perpendicular AF a la arista SC (para la construcción es posible hallar que $CF : CS = 1 : 3$); 6) por el punto N en el plano SBC se traza la recta $NM \parallel PF$; 7) unan los puntos M y K. El cuadrilátero $KLNM$ es la sección buscada. 749. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{4}$.

750. $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{10}}{9}$. 751. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{21}}{3}$. 752. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}}{4}$.

753. $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\alpha\right)$. 754. $\arccos(\operatorname{tg}\alpha)$. 755. $\frac{\operatorname{tg}\beta}{2\operatorname{sen}\alpha}$. 756. 2 : 3.

757. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{2}$. 758. $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{13}}{6}$. 759. $\sqrt{6}$. 760. 11 : 12.

761. $\frac{a\sqrt{2a^2+4b^2}}{2a+\sqrt{2a^2+4b^2}}$. 762. $\frac{a^2\operatorname{sen}^2 2\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2 3\alpha}$. 763. $4d^2\operatorname{sen}\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$.

764. $d^2\sqrt{2}\operatorname{sen}2\beta\cos(45^\circ-\alpha)$. 765. $\frac{4\sqrt{2}\,H^2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$.

766. $\frac{6\sqrt{6}\,H^2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{sen}(45^\circ+\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha}$. 767. $\frac{\sqrt{2S\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. 768. $\frac{4}{3}H^2$.

769. 96 cm², 144 cm², 48 cm², 288 cm². 770. $\frac{\sqrt{S\cos\alpha}\operatorname{sen}\alpha}{2}$.

771. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\sqrt{3}\,S\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}}$. 772. $\frac{a^2(1+\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)}{\cos\alpha}$.

773. $\frac{2H^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$. 774. $1+\sqrt{2}$.

775. $\frac{4(1+\operatorname{sen}\alpha)\sqrt{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}}{\operatorname{sen}2\alpha\operatorname{sen}\beta}$. 776. $\frac{1+\sqrt{5}}{6}$.

777. $\frac{1+2\operatorname{sen}\alpha}{12\operatorname{sen}\alpha}$. 778. $\frac{\pi}{\cos\alpha}$. 780. $\frac{\pi\sqrt{15}}{3}$. 781. $\arccos\frac{4}{5}$.

782. $2\pi a^2\sqrt{3}$. **783.** 270π cm². **784.** $2\pi(a+b)\sqrt{a^2+b^2}$.

785. $\dfrac{2\pi a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **786.** $\dfrac{4\pi R^2(2+\cos\alpha+2\operatorname{sen}\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha}$. **787.** 4π.

788. $\dfrac{\pi(5+4\sqrt{3})}{2}$. **789.** $4\pi:\sqrt{3}$. **790.** $\sqrt{2}+1$. **791.** $a^2(1+\sqrt{4+2\sqrt{2}})$.

792. $120°$. **793.** $\left(\sqrt{S_1}+\dfrac{\sqrt{S_2}}{2}\right)^2$. **794.** $\dfrac{a^2\operatorname{sen}\alpha}{\cos\varphi}$. Sea SO la altura de la pirámide (fig. 213). Del vértice S bajamos la perpendicular SN a la arista

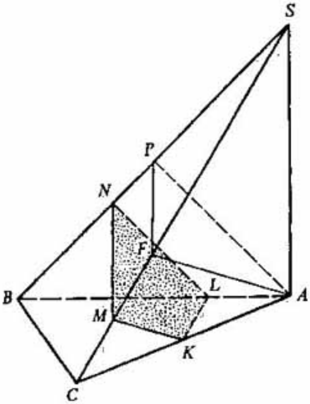


Fig. 212

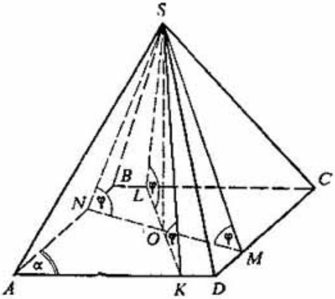


Fig. 213

AB y la perpendicular SL a la arista BC. A continuación, tracemos las rectas NO y LO y designemos con M y K sus puntos de intersección con los lados CD y AD, respectivamente. Entonces, $\angle SNO=\angle SLO=\angle SMO=\angle SKO=\varphi$, el $\triangle SON=\triangle SOL=\triangle SOM=\triangle SOK$, es decir, $ON=OL=OM=OK$ y, por lo tanto el punto O es equidistante a los lados de la base.

795. $\dfrac{d^2\operatorname{sen}2\alpha\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$. **796.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3\cos\alpha}(1+\sqrt{1+3\operatorname{sen}^2\alpha})$. **797.** $2a^2+2a\times\sqrt{4b^2-a^2}$. **798.** $ab(\sqrt{2}+1)$. **799.** 3 veces. **800.** $\dfrac{a^3}{2}$. **801.** $2a^3\operatorname{sen}\alpha\times\sqrt{\operatorname{sen}3\alpha\operatorname{sen}\alpha}$. **802.** $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. **803.** am^2. **804.** $\dfrac{a^3\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\varphi}\times\sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right)}$. **805.** $\dfrac{a^2(b+c)}{2}$. **806.** $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{\dfrac{V^2}{\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha}}$. **807.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **808.** $\dfrac{a^3\operatorname{sen}2\alpha\operatorname{sen}\alpha}{2\cos^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$. **809.** $\dfrac{a^3}{3}\times$

$\times \operatorname{sen}\frac{\alpha}{3}\sqrt{\operatorname{sen}\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$. 810. $\frac{2S}{3}\sqrt{\frac{S}{\operatorname{tg}\alpha}}$.

811. $\frac{H^3\sqrt{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}+30^\circ\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}-30^\circ\right)}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$. 812. $-\frac{2}{3}b^3\frac{\cos\frac{\varphi}{2}\cos\varphi}{\operatorname{sen}^3\frac{\varphi}{2}}$.

813. $\sqrt{\frac{9V^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\sqrt{3}(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}}$. 814. $\frac{c^3}{24}\operatorname{sen}2\alpha\operatorname{tg}\beta$.

815. $\frac{l^3(4+\operatorname{tg}^2\alpha)\sqrt{12+3\operatorname{tg}^2\alpha}}{8\operatorname{tg}^2\alpha}$. 816. $\frac{l^3\sqrt{3}(1+4\operatorname{tg}^2\beta)\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}}{4\operatorname{tg}^2\beta}$.

817. $\frac{1}{12}b^3\sqrt{2}$. 818. $\frac{2PQ}{3b}$. 819. $\frac{H^3\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)}{3\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta}$. 820. $\frac{3\sqrt{2}}{4}a^3$.

821. 1 : 31. 822. $\sqrt[3]{\frac{9V^2}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}$. 823. $\frac{2}{3}a^2\cos^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.

824. $\frac{1}{6}S\operatorname{tg}\beta\sqrt{S\operatorname{sen}\alpha}$. 825. $\frac{\pi bc(b+c)\operatorname{sen}\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{3}$. 826. $\frac{1}{2}\pi b^3(5+$ $+3\sqrt{2})$. 827. $2\pi S\sqrt[4]{\frac{4S^2}{27}}$. 828. 1 : 2. 830. $\frac{V_a}{V_b}=\frac{b}{a}$, $\frac{V_b}{V_c}=\frac{c}{b}$.

832. $\frac{a^3-b^3}{6\cos\alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha}$. 834. $\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{6}$. 835. $\frac{R^3\alpha^2\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}}{24\pi^2}$.

836. $\frac{a^3}{48}(4\sqrt{2}+\sqrt{10})$. 837. $\frac{\pi aS}{\operatorname{sen}\alpha}$. 838. 1 : 4. 839. $\frac{3\sqrt{3}+1}{26}$.

840. 97 : 191. 841. 25 : 47. 842. 1 : 47. 843. 7 : 20. 844. 7 : 17. 845. 13 : 23

846. 7 : 20. 847. 8 : 37. 848. 1 : 14. 849. 3 : 5. 850. $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{5\sqrt{2}}{7}$. 851. 3 : 1.

852. 5 : 24. 853. $2a\sqrt{R^2-d^2}$. 854. $\sqrt{\frac{a^2}{8}+\frac{R^2}{2}}$, donde $a\leqslant 2R$.

855. $-\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}^3\alpha\operatorname{tg}2\alpha$, donde $90^\circ<\alpha<112^\circ30'$. 856. $\pi R^2(1+\cos^2 2\alpha+$ $+2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}2\alpha)$. 827. $\sqrt{\frac{S_1(S_2-S_1)}{\pi(S_2+S_1)}}$. 858. $\frac{\pi R^3\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^3\alpha}$.

859. $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. 860. $2\arccos\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{4}}\right)$. 861. $\arccos(\sqrt[3]{2}-1)$. 862. 1 : 1; 9 : 7.

863. $2\operatorname{arcsen}\frac{m-n}{m+n}$. 865. 60°. 866. $\frac{2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha}$. 867. $\operatorname{arcsen}\frac{n-m}{n+m}$. 868. $\sqrt{3}:1$.

869. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}$. 870. $\operatorname{ctg}40^\circ:\operatorname{ctg}30^\circ:\operatorname{ctg}20^\circ$. 872. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

873. $2R\sqrt{1-\frac{4}{3}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}$ (fig. 214). Ya que $SA=SB=SC$ y $\angle ASB=$ $=\angle BSC=\angle CSA=\alpha$, $SABC$ es una pirámide triangular regular. Sea $SC=x$. Entonces, $CD=x\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, $BC=2x\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, $AD=\sqrt{3}\,x\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ y $AP=\frac{2}{3}AD=$

$=\frac{2}{3}\sqrt{3}x \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$. 874. $\dfrac{a \operatorname{sen}\alpha}{2\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+1\right)}$. 875. $\dfrac{24+7\pi}{48}$.

876. $\frac{1}{12}\pi a^3(15-8\sqrt{2})$. 877. $\frac{1}{4}a(3-\sqrt{3})$. 878. $\frac{a(2-\sqrt{3})}{2}$. Sea que las dos esferas son tangentes a las caras que tienen el vértice común D (fig. 215). Entonces los puntos O_1 y O_2, que son los centros de dichas esferas, yacen en la diagonal B_1D del cubo. Como la esfera mayor es tangente

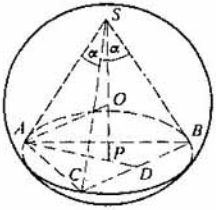


Fig. 214

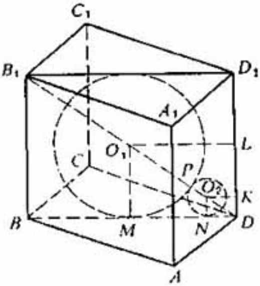


Fig. 215

a las bases superior e inferior, $O_1M=\frac{a}{2}$, $O_1L=MD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Haciendo, para abreviar, $O_2N=x$, de la semejanza de los triángulos O_2KD y O_1LD obtenemos que $O_2K=x\sqrt{2}$ y, más adelante, $O_2D=x\sqrt{3}$. 879. $\frac{1}{8}a\sqrt{41}$.

880. $\frac{1}{2}R(2+\sqrt{2})$. 881. $\frac{1}{2}a(3-\sqrt{3})$. 882. $a(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$.

883. $\frac{20\sqrt{3}}{27}R$. 884. 17 : 125. Sea que la esfera es tangente a la base superior del cubo en el punto T y a las aristas AB, BC, CD y DA de la base inferior. Los puntos de tangencia de la esfera con las aristas son los puntos medios de éstas. Consideremos la sección de la combinación de la esfera con el cubo con el plano TPQ, donde P es el punto medio de la arista AB; Q, el punto medio de la arista CD (fig. 216). Esta sección también pasa por el centro de la esfera, el punto O. Introduzcamos el parámetro auxiliar $OT=R$ y, para abreviar, hagamos la arista del cubo igual a x. Entonces del triángulo OMQ obtenemos que $x=\frac{8}{5}R$. Fuera del cubo se encuentran cinco segmentos esféricos: uno bajo la base del cubo y cuatro (que son iguales) por los lados de las caras laterales del cubo. 885. $8:\sqrt{41}$. Consideremos la sección de la combinación de una esfera con un cubo con el plano ORS que pasa por R y S que son los puntos medios de dos aristas opuestas de la base del cubo y el punto O, centro de la esfera (fig. 217). (P y Q son los puntos medios de dos aristas opuestas de la base inferior «han quedado suspendidos», ya que el radio de la esfera es mayor que la mitad de la arista del cubo.) Introducimos un parámetro auxiliar, haciendo la arista del cubo igual a a. Entonces, $MF=a\sqrt{2}$. Seguidamente, analicen

los triángulos OKF y OMS. 886. $\frac{1}{7}\pi(5\sqrt{2}-6)$. 887. $\dfrac{h^3}{\sqrt{2}\,\text{sen}\,2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\times\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$

888. $2\,\text{arctg}\,\frac{1}{2}$. 889. $\text{arcsen}\,\frac{6}{\pi m}$; $\pi-\text{arcsen}\,\frac{6}{\pi m}$. 890. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 891. $\frac{a\sqrt{6}}{8}$.

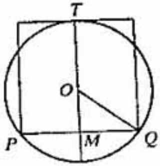


Fig. 216

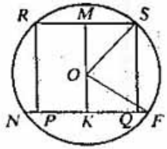


Fig. 217

893. $\dfrac{a\,\text{tg}\,\alpha}{2\sqrt{3-4\,\text{sen}^2\alpha}}$. 894. $\dfrac{2\sqrt{3}\,H\,\text{tg}\,\frac{\alpha-\pi}{6}}{9\,\text{tg}^2\frac{\alpha-\pi}{6}-3}$. 895. $\dfrac{\sqrt{16S^2+45a^4}}{24a}$.

896. 1 : 1; 9 : 7. 897. $\frac{4}{3}R^3\dfrac{\text{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\,\text{tg}\,\varphi}{\text{sen}\,\alpha}$. 898. $\dfrac{a^4}{48\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}}$. 899. $\frac{1}{2}\times$ $\times\,\text{tg}\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)\sqrt[3]{6V\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}}$. 900. $\frac{1}{2}\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\text{tg}\,\frac{\beta}{2}$. 901. $2\sqrt{2}\,R^2\cos\alpha\times$ $\times\left(\text{sen}\,\alpha+\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\alpha}\right)$. 902. $\dfrac{\pi H\alpha\sqrt{\cos\alpha}}{45°\cos\frac{\alpha}{2}}$. 903. En la arista de la base $\text{arccos}\,\frac{n-1}{n+2}$, en la arista lateral $2\,\text{arctg}\sqrt{\frac{n^2+1}{2n}}$.

904. $\dfrac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}$. 905. $\sqrt{2}\,b\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\,\text{sen}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$ (fig. 218). Sea $FL=x$, entonces también $OL=x$. Del triángulo MNK (en el que está inscrita la circunferencia que es la base del cilindro) $LK=x\,\text{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$ y del triángulo SAO, $AO=b\cos\alpha$. En tal caso, $AL=b\cos\alpha-x$. Pero, $AL=LK$, o sea, $b\cos\alpha-x=$ $=x\,\text{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$. 906. $\dfrac{H^2\,\text{sen}\,\frac{2\alpha+\beta}{2}\cos\frac{2\alpha-\beta}{2}}{\text{sen}^2\alpha}$. 907. $\frac{3\sqrt{2}}{8}a$. Examinemos la sección del tetraedro con el plano que pasa por los vértices A, B y el punto medio F de la arista SC (fig. 219). En el triángulo ABF $AB=a$. Entonces,

$AF=BF=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ y $DF=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Como el triángulo ABF está inscrito en una circunferencia, O es el punto de intersección de las perpendiculares a los puntos medios de sus lados. De la semejanza de los triángulos FOM y FBD (M es el punto medio del lado BF) obtenemos: $\frac{OF}{BF}=\frac{MF}{DF}$. 908. 6 cm.

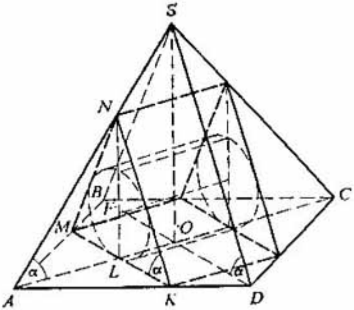


Fig. 218

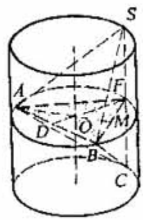


Fig. 219

909. $\frac{9R^3 \operatorname{tg}\alpha}{4(\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha)^3}$. 910. $l=\frac{a\sqrt{3}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$, $R=\frac{a\sqrt{3}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2}}$. Examinemos la sección diagonal del cubo. Ella será, además, la sección axial del

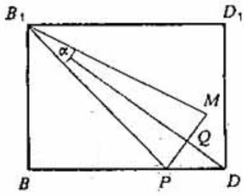


Fig. 220

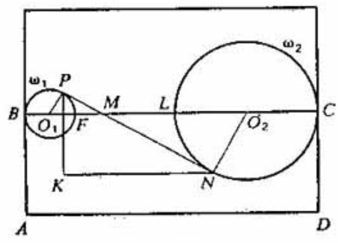


Fig. 221

cono inscrito en el cubo (fig. 220) (el punto M no yace en la arista DD_1, ya que el cono no es tangente a las aristas del cubo). Es evidente que $BB_1=a$, $BD=a\sqrt{2}$, $B_1D=a\sqrt{3}$. Sea $PQ=x$. Entonces, del triángulo rectángulo B_1PQ tendremos $B_1Q=x\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ y de la semejanza de los triángulos DPQ y DBB_1 obtendremos $\frac{PQ}{BB_1}=\frac{DQ}{BD}$. 911. $\frac{R^2\sqrt{6}}{4}$. 912. $\frac{\pi H^3 \operatorname{sen}(2\alpha-\beta)\operatorname{sen}\beta}{3\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)}$.

913. $\arccos \frac{\sqrt{ab}}{h}$. **914.** $\frac{a\sqrt{12+\pi^2}}{2\sqrt{3}\pi}$ (fig. 221). Como $BC=BO_1+O_1O_2+$ $+O_2C=\frac{a}{12}+\frac{2a}{3}+\frac{a}{4}=a$ y $AD=a$, $BC=AD$, es decir, las circunferencias ω_1 y ω_2 son tangentes a los lados laterales del rectángulo. De la semejanza de los triángulos O_1MP y O_2MN se desprende que $\frac{O_1M}{O_2M}=\frac{O_1P}{O_2N}$, de donde $O_2M=\frac{a}{2}$. Pero, $O_2N=\frac{a}{4}$, en tal caso $\angle O_2MN=30°$ y, por lo tanto, si se construye la recta $KN \parallel BC$ y la recta $PK \parallel AB$, en el triángulo PNK $\angle PNK=$

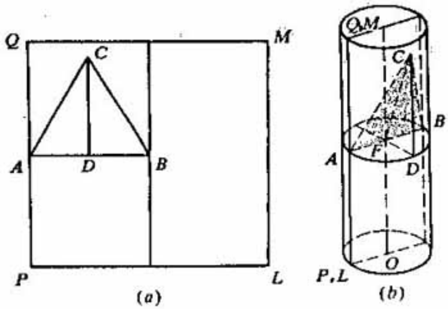


Fig. 222

$=30°$. A continuación, $O_1M=\frac{a}{6}$, después $PM=\frac{a\sqrt{3}}{12}$ y $MN=\frac{a\sqrt{3}}{4}$, o sea $PN=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ y del triángulo PKN $KN=\frac{a}{2}$ y, más adelante, $PK=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

915. $\frac{b^3\sqrt{5}}{150}$. **916.** $\frac{5a^3}{48}$. **917.** $\left(\frac{abc}{ab+ac+bc}\right)^3$. **918.** $\frac{b\sqrt{2}\operatorname{sen} 2\alpha}{4\operatorname{sen}(45°+\alpha)}$.

919. $\frac{8\pi^2}{\sqrt{3\pi^2+4}}$ (fig. 222, *a*, *b*). Introduzcamos el parámetro auxiliar, haciendo $PL=2a$. Entonces, $AB=a$. Como el cuadrado $PQML$ se enrolla en un cilindro, $2\pi OP=2a$, de donde $OP=\frac{a}{\pi}$ y, por lo tanto, $AB=\frac{2a}{\pi}$. Al enrollar el cuadro la longitud del segmento CD no varía, o sea, $CD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. A continuación, del triángulo CFD $CF=\frac{a}{2\pi}\sqrt{3\pi^2+4}$. **921.** a) $\sqrt{2}$ cm²; b) 6 cm².

922. $\frac{P\sqrt{5}}{10}$. **923.** $3\sqrt{3}$ cm. **924.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. **925.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **926.** 8 m.

928. 2 cm. **929.** $3\sqrt{3}$ cm², 12 cm². **932.** RH si $R\leqslant H$; $\frac{R^2+H^2}{2}$ si $R>H$.

933. $\sqrt{\frac{3V}{5\pi}}$. 934. a) $\frac{p}{2}$, $\frac{3p}{4}$, $\frac{3p}{4}$; b) $\frac{3p}{5}$, $\frac{3p}{5}$, $\frac{4p}{5}$. 935. $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.
936. $h=\frac{H}{3}$, donde h es la altura del cilindro, H, la altura del cono.
937. a) $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$; b) $R\sqrt{2}$. 938. a), b) $\frac{4R}{3}$. 939. a) $4R$; b) $R\sqrt{2}$. 940. $R\sqrt{3}$.
941. $\frac{8}{27}(\sqrt{3}-1)^3$. 942. $\frac{4}{9}$. 943. $45°$. 944. $\frac{1}{3}$. 945. $\frac{R\sqrt{13}}{13}$.
946. $\frac{32\sqrt{3}}{27}R^3$. 947. $\operatorname{arctg}\left(\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}\right)$. 948. $R=\frac{9a}{4}$, $H=3a$.
949. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm³. 950. $\frac{16}{81}V$. 951. $\frac{1}{12}V$.

BIBLIOGRAFÍA

1. *Виленкин Н. Я., Мордкович А. Г., Куницкая Е. С.* Математический анализ. Дифференциальное исчисление. М.: Просвещение, 1984, 175 с. (*N. Ya. Vilenkin, A. G. Mordkóvich, E. S. Kunitskaya.* Análisis matemático. Cálculo diferencial.)

2. *Геометрия.* Учебное пособие для 6—8 классов/Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Просвещение, 1982, 384 с. (*Geometría.* Manual didáctico para los grados 6—8. Dirigido por A. N. Kolmogórov.)

3. *Литвиненко В. Н.* Практикум по решению задач школьной математики. Геометрия М.: Просвещение, 1982, 160 с. (*V. N. Litvinenko.* Prácticas para resolver problemas matemáticos en la escuela. Geometría.)

4. *Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К.* Задачи вступительных экзаменов по математике. М.: Наука, 1983, 448 с. (*Yu. V. Nesterenko, S. N. Olejnik, M. K. Potápov.* Problemas para los exámenes de ingreso de matemáticas.)

5. *Погорелов А. В.* Геометрия в 6—10 классах. М.: Просвещение, 1983, 288 с. (*A. V. Pogoriélov.* Geometría para los grados 6—10.)

6. *Сборник* конкурсных задач по математике для поступающих во ВТУЗы/Под ред. М. Сканави, 4-е изд. М.: Высшая школа, 1980, 542 с. (*Compendio* de problemas de concurso de matemáticas para los estudiantes que ingresan a los centros de enseñanza superior. Dirigido por M. Skanavi.)

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I—110, GSP, URSS.